



دوفصلنامه تاریخ علوم و فناوری دوره اسلامی
سال هفتم، شماره دوم، پاییز و زمستان ۱۳۹۷
شماره پیاپی: ۱۴

صاحب امتیاز: مؤسسه پژوهشی میراث مکتوب
مدیر مسئول: اکبر ایرانی
سر دبیر: محمد باقری
مدیر داخلی: زینب کریمیان
ویراستار: پویان رضوانی
اجرای جلد: محمود خانی

مدیر فنی و امور چاپ: حسین شاملوفرد

همکاران علمی

حسن امینی * حمید بهلول * پویان رضوانی * حنیف قلندری * یونس کرامتی * امیرمحمد گمینی
شمامه محملی فر * یونس مهدوی * سجاد نیک فهم خوب روان

مشاوران علمی

پرویز اذکائی * یوسف ثبوتی * توفیق حیدرزاده
محمدابراهیم ذاکر * حسن طارمی * حمیدرضا گیاهی یزدی
مهلی محقق * حسین معصومی همدانی * محمدجواد ناطق * سیدحسین نصر
علی بابایف (جمهوری آذربایجان) * جان لنارت برگرن (کانادا) * گلن وان بروملن (کانادا) * احمد جبار (فرانسه)
سرگی دمیدوف (روسیه) * رشدی راشد (فرانسه) * جمیل رجب (کانادا) * سری رامولا سارما (آلمان) * ژاک سزبانو (سوئیس)
جورج صلیبا (امریکا) * حکیم سید ظل الرحمان (هند) * رادا چاران گوپتا (هند) * ریچارد لورج (انگلستان)
مصطفی موالدی (سوریه) * یان پیتر هوشندایک (هلند) * میچیو یانو (ژاپن)

تصویر پشت جلد: فواد سرگین، پژوهشگر تاریخ علوم دوره اسلامی

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شماره ۱۱۸۲، طبقه چهارم، شماره ۱۶
کد پستی: ۹۳۵۱۹-۱۳۱۵۶ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۲۰.۰۰۰ تومان

روایت هندی محاسبه سینوس ۱ درجه به روش تقریب تکراری جمشید کاشانی^۱

کیم پلوفکر^۲
مریم زمانی^۳

چکیده

ورود مثلثات سینوس‌ها از خاستگاهش در اخترشناسی هندی به جهان اسلام در هزاره نخست میلادی و بازگشتش به هند در نیمه دوم این هزاره، تعامل شناخته شده‌ای شامل برخی موارد جالب و مطالعه نشده است. این مقاله روشی از سده‌های میانه برای تقریب مقدار جیب (Rsin) را در تحریری به زبان سانسکریت که ظاهراً مربوط به دربار جی سینگ در اوایل قرن هجدهم میلادی است، بررسی می‌کند.

مقدمه: محاسبه مقادیر تابع برای هر درجه به روش مثلثاتی

تاپیش از بسط عبارت‌های سری‌های توانی در حوالی میانه هزاره دوم، سنجش توابع مثلثاتی زاویه‌ها یا کمان‌های دلخواه به انتخاب متغیر تابع بستگی داشت. مقادیر وتر یا جیب (یعنی مقادیر $\sin x$ در دایره مثلثاتی به شعاع R، که مقدار R واحد نیست) برای زاویه‌های معلوم 30° ، 45° و 60° ، دست کم بسته به دقت مقادیر معلوم ثابت‌های گنگی چون $\sqrt{2}$ یا $\sqrt{3}$ با روش‌های هندسی ساده‌ای محاسبه می‌شد. اتحادهای مثلثاتی چون دستورهای نصف زاویه یا مجموع و تفاضل، امکان محاسبه مقادیر دیگر تابع را با این مقادیر پایه می‌دهند. برای مقدارهای دیگر ریاضی‌دانان ناچار به استفاده از درون‌یابی خطی (یا در مواردی درون‌یابی مرتبه‌های بالاتر) یا دیگر دستورهای تقریب بین مقادیر معلوم در جدول‌های مثلثاتی بودند.

کهن‌ترین جدول‌های وتر از یونان باستان، شامل مقادیر وتر برای هر درجه یا نیم درجه کمان، در

1. Plofker, Kim, "An Indian Version of al-Kāshī's Method of Iterative Approximation of $\sin 1^\circ$ ", *Gaṇita Bhāraṭī* 39, no. 2, 2017, pp. 95-106.

۲. تاریخ‌نگار ریاضیات هند، plofkerk@union.edu

۳. کارشناس ارشد تاریخ علم، مدرس تاریخ ریاضیات در دانشگاه گیلان maryam_zamani77@yahoo.com

مجسطی بطلمیوس موجود است. اما کمان 3° کوچک‌ترین کمان قابل ترسیم هندسی است (با نصف کردن مکرر 72° و 60° و با اتحاد تفاضل دو زاویه). به علت ناممکن بودن تثلیث زاویه^۱، وتر زاویه یک درجه ($\text{Crd}1^\circ$) مستقیماً قابل دستیابی نیست ولی با نامساوی زیر که پیشینیان هم آن را می‌دانستند، تقریب پذیر است. برای $0 < \beta < \alpha < 90^\circ$:

$$\frac{\text{Crd}\alpha}{\text{Crd}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\text{Crd}\alpha}{\alpha} < \frac{\text{Crd}\beta}{\beta}$$

با دوبار استفاده از قاعده نصف زاویه برای وتر معلوم سه درجه، نامساوی دوگانه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\text{Crd} \frac{3^\circ}{2}}{\frac{3}{2}} < \frac{\text{Crd}1^\circ}{1} < \frac{\text{Crd} \frac{3^\circ}{4}}{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{2}{3} \text{Crd} \frac{3^\circ}{2} < \text{Crd}1^\circ < \frac{4}{3} \text{Crd} \frac{3^\circ}{4}$$

بطلمیوس برای یافتن اندازه وتر 1° در دایره‌ای به شعاع 60 ، مقدار شصتگانی $1; 2, 50$ (معادل $\frac{1}{60} + \frac{2}{3600} + \frac{50}{360000}$) را مشترکاً برای حد پایینی و بالایی و تریک درجه محاسبه کرد. مقدار بطلمیوس و روشی که برای استخراج وتر یک درجه به کار برد، همواره در قرن‌های پس از آن به صورت منبعی برای مقادیر این کمیت در مثلثات یونانی و یونانی-اسلامی درآمد. وتر و سینوس کمان یا زاویه θ در دایره‌ای به شعاع R با دستور «نصف وتر دوبرابر زاویه» به هم مربوطند.

$$R \sin \theta = \frac{1}{2} \text{Crd}(\theta)$$

مقادیر جیب در مثلثات هند باستان، گرچه به ظاهر در آغاز از محاسبه وتر در یونان باستان ملهم بود، به صراحت شامل مقادیر تابع مثلثاتی به ازای 1° یا برهان نامساوی دوگانه برای تقریب زدن مقدار آنها نیست. جدول‌های مثلثاتی ثبت شده با حروف در متن‌های منظوم نجومی یا زیج‌های سانسکریت تنها شامل جیب‌های ترسیم‌پذیر 24 مضرب صحیح اول از $3^\circ 45'$ تا 90° و بر اساس درون‌یابی خطی برای یافتن بقیه مقادیر جیب است.

در برخی آثار سانسکریت برای تسهیل کاربری و از بر کردن، «لاگو» یا جدول‌های نجومی ساده که تنها شامل چند مقدارند، عرضه شده است. رساله واتشورَسیدهانتا^۲ تألیف 904 م، جدول جیب 96 مضرب صحیح کمان $56' 15''$ ربع اول را می‌دهد (ظاهراً حاصل از دوبار نصف کردن $3^\circ 45'$ و با استفاده از دستور نصف زاویه) که تا حدی نامتعارف است. اما کهن‌ترین جدول موجود مقادیر

۱. تثلیث زاویه در حالت کلی پاسخ ندارد اما برای زاویه‌های خاص امکان پذیر است.

2. *Vaṭeśvarasiddhānta*

جیب برای مقادیر صحیح درجه در راجمرگانکا، کتابچه‌ای شامل جداول از اوایل قرن دهم میلادی، آمده است که در آن جامقادیر شعاع دایره و جیب یک درجه عبارتند از: $R=1000$ و $R \sin 1^\circ = 17;27$.

هم‌چنین بخش "استخراج جیب" (جیوتپاتی^۲، ابیات ۱۶ تا ۱۷) از رساله سیدهانتا شیرومنی^۳ تألیف بهاسکاراچاربا در حدود ۱۱۵۰م شامل محاسبه مقادیر تابع‌های مثلثاتی همه درجات است.

स्वगोऽङ्गेषुषडंशेन वर्जिता भुजशिञ्जिनी
कोटिज्या दशभिः क्षुण्णा त्रिसन्नेषुविभाजिता ॥
तदैक्यमग्रजीवा स्यादन्तरं पूर्वशिञ्जिनी

جیب کمان $[\theta]$ به اندازه یک 16569 م خودش کاهش یافته؛ جیب متمم آن ده برابر شده [و] بر 573 تقسیم شده است. مجموعشان برابر با جیب کمان بعدی $(\theta + 1^\circ)$ و تفاضلشان برابر با جیب کمان قبلی $(\theta - 1^\circ)$ است.

این دستورها هم ارز اتحادهای جمع و تفاضل برای یافتن سینوس زاویه مفروض به علاوه یا منهای یک درجه است.

$$\sin(\theta \pm 1^\circ) = \sin \theta \cdot \frac{6568}{6569} \pm \cos \theta \cdot \frac{10}{573}$$

دستورهای بالا مقادیر زیر را برای سینوس و کسینوس یک درجه به دست می‌دهند:

$$\sin 1^\circ \approx \frac{10}{573} \approx 0.0174524 \quad (\approx \text{مقدار امروزی})$$

$$\cos 1^\circ \approx \frac{6568}{6569} \approx 0.9998477 \quad (\approx \text{مقدار امروزی})$$

رساله سیدهانتا شیرومنی توضیح نمی‌دهد که بهاسکارا چگونه این مقادیر را یافته است، اما شایان ذکر است که تقریب جبری سینوس توسط بهاسکارای اول مشهور دقت کم‌تری دارد ([۱۱] و [۳] را ببینید).

$$\sin 1^\circ \approx \frac{4(1)(180-1)}{40500-1(180-1)} = \frac{716}{40321} \approx 0.0177575$$

$$\cos 1^\circ \approx \frac{4(89)(180-89)}{40500-89(180-89)} = \frac{32396}{32401} \approx 0.9998457$$

1. Rājamṛgāṅka
2. jyotpati
3. Siddhānta śiromaṇi

از تاریخچه پیشرفت‌های هندیان در ابداع روش‌های محاسبه بسیار دقیق کمیت‌های مثلثاتی، به ویژه سری‌های توانی که در مکتب مداوا^۱ در منطقه کرالا از اواخر سده ۱۴م به بعد ابداع و تشریح شد، بسیار بیش از این می‌توان گفت. اما در ادامه این مقاله بر آزمون روش تقریب خاصی برای سینوس ۱° در مثلثات دوره اسلامی و اقتباس بعدی از آن در هند تمرکز می‌کنیم.

روش کاشانی برای تقریب سینوس یک درجه

از آنچه گفته شد پیداست که یافتن مقادیر تابع در مثلثات سده‌های میانه برای همه درجات کمان اساساً به دانستن اندازه مقدار سینوس ۱° وابسته بود و از طرفی روش مبتنی بر نامساوی دوگانه که بطلمیوس برای وتر ۱° به کارگرفت دقت محدودی دارد. در قرن نهم هجری جمشید کاشانی در سمرقند روش دیگری بر اساس دستوری هم‌ارز اتحاد سینوس ۳α مطرح کرد:

$$\sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

دستور کاشانی در دایره مثلثاتی به شعاع ۶۰ چنین است:

$$R \sin(3\alpha) = 3R \sin \alpha - \frac{4}{R^2} (R \sin \alpha)^3$$

اگر α را ۱° بگیریم پس ۳α = ۳° و چنان‌که در بالا آمده، کوچک‌ترین زاویه صحیحی است که مقدار مثلثاتی‌اش را می‌توان به دقت دلخواه به روش هندسی ترسیم کرد. اگر بگیریم $x = R \sin 1^\circ$ ، آنگاه:

$$R \sin 3^\circ = 3x - \frac{4x^3}{3600}$$

بنابراین:

$$x = \frac{4x^3 + 3600 \times R \sin 3^\circ}{3 \times 3600} = \frac{x^3 + 900 \times R \sin 3^\circ}{2700} = \frac{x^3 + 15,0 \times R \sin 3^\circ}{45,0}$$

این معادله درجه سوم با روش‌های شناخته شده زمانه کاشانی حل شدنی نبود. اما با دانستن اینکه:

$$R \sin 3^\circ \approx 3; 8,24,33,59,34, \dots$$

و بنابراین:

$$x = \frac{x^3 + 47,6; 8,29,53, \dots}{45,0} = \frac{x^3 + 2,6; 8,29,53, \dots + 45,0}{45,0}$$

کاشانی کم و بیش چنین استدلال کرد:

1. Madhava

چون می‌دانیم که مقدار صحیح 1°Rsin یا x یک است، می‌توانیم فرض کنیم که $x^3 \approx 1$ و یک را از دو طرف معادله بکاهیم:

$$\begin{aligned} x-1 &\approx \frac{1^3}{45,0} + \frac{2,6;8,29,53, \dots}{45,0} \\ &= \frac{2,7;8,29,53, \dots}{45,0} \\ &= 0;2 + \frac{37;8,29,53, \dots}{45,0} \end{aligned}$$

سپس دومین رقم شصتگانی را با فرض $x^3 \approx (1;2)$ و کاستن $(1;2)$ از طرفین می‌یابیم:

$$\begin{aligned} x-1;2 &\approx \frac{(1;2)^3}{45,0} + \frac{37;8,29, \dots}{45,0} \\ &= 0;0,49 + \frac{0;29,42, \dots}{45,0} \end{aligned}$$

تقریب بعدی $x^3 \approx (1;2,49)$ است و به همین روش می‌توانیم هر چند رقم شصتگانی که بخواهیم پیدا کنیم.

خلاصه‌تر بگوییم، اگر تقریب n ام برای 1°Rsin با n رقم شصتگانی را چنین بنویسیم:

$$x_n \approx 1; a_1, a_2, \dots, a_n,$$

رقم $(n+1)$ ام یعنی a_{n+1} را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$a_{n+1} \approx x - x_n \approx \left[\frac{6 \cdot 10^n \times ((x_n)^3 + 900 \cdot (R \sin 1^\circ) - 2700 \cdot x_n)}{2700} \right]$$

و تقریب جدید x_{n+1} به صورت زیر در می‌آید:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{a_{n+1}}{6 \cdot 10^n}$$

جمشید کاشانی به این روش مقدار دقیقی برای 1°Rsin به دست آورد که چنین آغاز می‌شود:

$$R \sin 1^\circ \approx 1; 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, \dots$$

رسالة خود کاشانی در مورد روش محاسبه جیب یک درجه گم شده است ولی بسیاری از نویسندگان بعدی این روش را حفظ و بررسی کرده‌اند. از بین آن‌ها نویسنده رساله‌ای عربی از قرن نهم یا دهم است به نام رسالة في استخراج جیب درجة واحدة بأعمال مؤسسة علی قواعد حسابية

وهندسیه علی طریقه غیاث الدین الکااشی^۱ (رساله در یافتن سینوس یک درجه با عملیات حسابی و هندسی به روش جمشید کاشانی).^۲ این رساله غالباً به قاضی زاده رومی که هم‌عصر و همکار کاشانی در رصدخانه سمرقند بود و به دیگر اخترشناسان رصدخانه سمرقند در اوایل سده دهم هجری، الغ بیگ، علی قوشچی و عبدالعلی بیرجندی نسبت داده شده است.

روش کاشانی با رویکرد آمیخته جبری و هندسی برای یافتن وتر ۲° در دایره‌ای به شعاع ۶۰ واحد، وتر قابل ترسیم ۶۰ را ۴۰؛ ۲۹؛ ۵۶؛ ۸؛ ۵۹؛ ۷؛ ۴۹؛ ۱۶؛ ۶ واحد و نتیجه را ۳۳؛ ۵۲؛ ۳۲؛ ۲۸؛ ۲۹؛ ۲۲؛ ۲۶؛ ۳۹؛ ۵؛ ۲ واحد یافته که نصف حاصل مقدار $R \sin 1^\circ$ است. توجه کنید که به علت ارتباط سینوس و وتر، روش تکرار در مورد وتر و جیب تقریباً یکی است:

$$\begin{aligned} R \sin(3\alpha) &= 3R \sin \alpha - \frac{4}{R^2} (R \sin \alpha)^3 \\ \frac{1}{2} \text{Crd}(6\alpha) &= \frac{3}{2} \text{Crd}(2\alpha) - \frac{4}{R^2} \frac{\text{Crd}^3(2\alpha)}{8} \\ \text{Crd}(6\alpha) &= 3 \text{Crd}(2\alpha) - \frac{\text{Crd}^3(2\alpha)}{R^2} \\ \text{Crd}(2\alpha) &= \frac{\text{Crd}^3(2\alpha) - \text{Crd}(6\alpha)}{3R^2 - 3} \\ &= \frac{\text{Crd}^3(2\alpha) + 3600 \text{Crd}(6\alpha)}{10800} \end{aligned}$$

در نتیجه اگر بگیریم $y = \text{Crd} 2^\circ$ و تقریب \ln امش با n رقم کسری شصتگانی را به صورت زیر نشان دهیم:

$$y_n \approx 1; a_1, a_2, \dots, a_n,$$

می‌توانیم همانند قبل رقم $(n+1)$ ام آن را به صورت زیر بنویسیم:

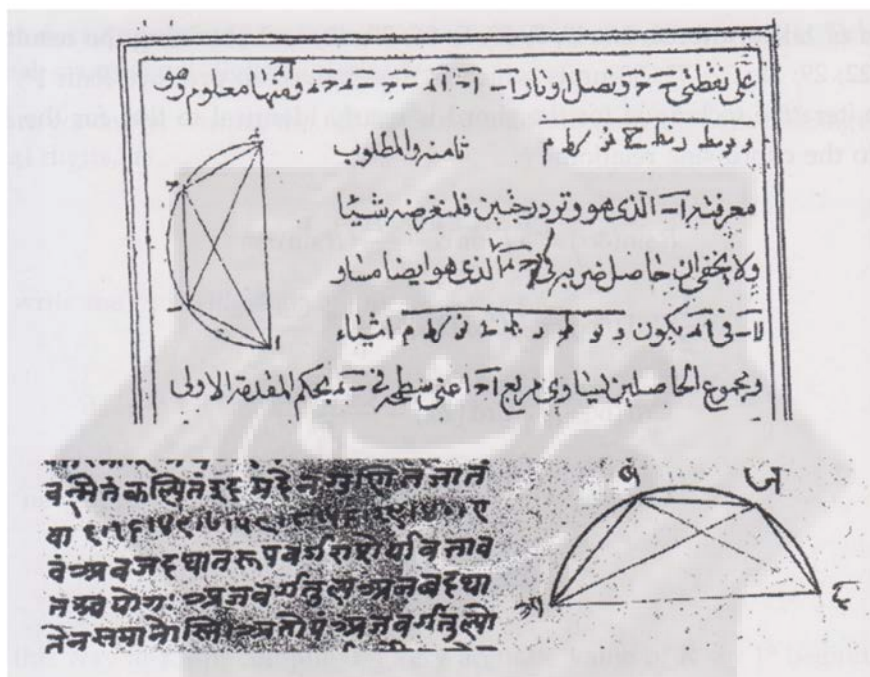
۱. رساله فی استخراج جیب درجه واحده را مرکز پژوهشی میراث مکتوب با تصحیح، ترجمه و تحقیق فاطمه سوادى در سال ۱۳۸۷ چاپ کرده است.

۲. رساله وتر و جیب اثر غیاث الدین کاشانی به جا نمانده، اما قاضی زاده رومی شرحی بر این رساله نوشته و عبدالعلی بیرجندی هم در شرح زیچ الغ بیگ خلاصه‌ای از رساله کاشانی را آورده است (قربانی، ابوالقاسم، کاشانی‌نامه، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸، ص ۱۵۴-۱۵۹). از دیگر رساله‌های نوشته شده درباره این موضوع رساله‌ای است به نام «در استخراج جیب یک درجه» به فارسی از مؤلفی ناشناس بر اساس شرح قوشچی بر زیچ الغ بیگ و رساله جیب درجه واحده از قاضی زاده رومی که با شرح و تصحیح فاطمه سوادى با عنوان «رساله‌ای فارسی درباره محاسبه جیب یک درجه» در شماره ششم مجله تاریخ علم (۱۳۸۷)، ص ۶۹-۱۰۴ چاپ شده است. هم‌چنین میرزا ابوتراب نطنزی از ریاضی دانان عصر محمد شاه رساله‌ای در تثلیث زاویه نوشته است که در آن برای یافتن جیب یک درجه همان روش کاشانی با ترسیم هندسی بیان شده است. این رساله با تصحیح فاطمه دوست قرین با عنوان «رساله میرزا ابوتراب نطنزی در تثلیث زاویه» در شماره ۸ مجله تاریخ علم (۱۳۸۸)، ص ۱-۲۹ به چاپ رسیده است.

$$a_{n+1} = y - y_n \approx \left[\frac{6^n ((y_n)^2 + 3600 (\text{Crđ } 6^\circ) - 10800 y_n)}{10800} \right]$$

و تقریب جدید y_{n+1} به صورت زیر خواهد بود:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{a_{n+1}}{6^n}$$



شکل ۱: توضیح ارتباط بین وترهای 6° و 2° در نموداری هندسی برای محاسبه جیب یک درجه به روش کاشانی. بالا: عبارت عربی با مقدار وتر 6° به حروف ابجد. پایین: روایت سانسکریت با نمایش مقدار وتر 6° به توسط رقم‌های "ناگری".

روایت سانسکریت روش کاشانی برای محاسبه وتر 2°

اخیراً در مقاله‌ای [۸]، نسخه‌ای خطی معرفی شد که احتمالاً مربوط به دوره حکومت جی سینگ/ جایا سیمهای^۱ دوم در اوایل قرن ۱۸م در جیپور و شامل ترجمه سانسکریت رساله عربی مذکور در بالاست. این ترجمه سانسکریت که احتمالاً به وسیله نایانا سوکا^۲، اخترشناس دربار جی سینگ،

1. Jayasimha
2. Nayanasukha

انجام شده است کاملاً از اصل عربی پیروی می‌کند و چنان‌که حروف ابجد روی نقاط نمودار شکل ۱ نشان می‌دهند، حتی نمودارهایشان هم با هم مطابقت دارند. جمله آغازین نشان داده شده در شکل ۲ شامل اشاره مترجم به متن اصلی است:

॥ श्रीगणेशाय नमः ॥ अथैकांशजीवाविषये उलुग्वेगीजीकस्य शरहविर्जदीस्थव्याख्या लिख्यते ॥

دروود بر ایزد گانشا. اکنون توضیحات در شرح بیرجندی بر زیج الغ بیگ، درباره سینوس یک درجه نوشته می‌شود.

॥ श्रीगणेशाय नमः ॥ अथैकांशजीवाविषये उलुग्वेगीजीकस्य शरहविर्जदीस्थव्याख्या लिख्यते ॥ तत्रैकांशजीवानघनेन अत्रं प्र

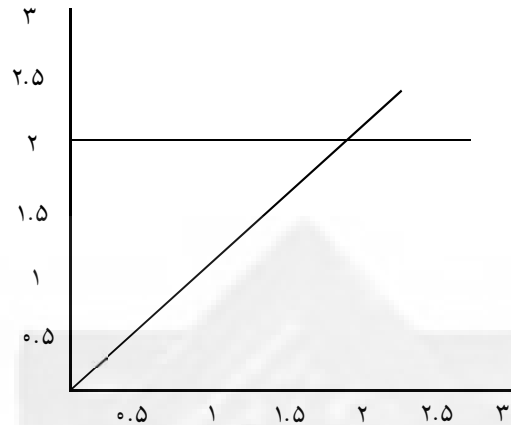
شکل ۲: آغاز ترجمه سانسکریت متن منسوب به بیرجندی (برگ اول ر نسخه).

گرچه مطالعه و ترجمه این اقتباس سانسکریت هنوز به پایان نرسیده است، یک نکته جالب در اینجا ذکر می‌شود. پس از توصیف وفادارانه روش بیان شده برای تعیین ارقام وتر مجهول 2° ، مترجم روش مستقیم‌تری با استفاده از یک دستور ساده تکرار پیشنهاد می‌کند که ترجمه‌اش چنین است:

اکنون برای تعیین مقدار وتر دو درجه روش دیگری را عابده مطرح کرده است که [در ادامه] می‌آوریم:

واحدها بر (ضریب) وتر دو درجه تقسیم و مکعب خارج قسمت محاسبه می‌شود. دوباره مکعب بر (ضریب) وتر دو درجه تقسیم می‌شود. خارج قسمت جدید باید به نخستین خارج قسمت افزوده شود. باز مکعب آن محاسبه و همین عمل تکرار می‌شود. یعنی با شروع از واحدها یا مقدار عددی معلوم $6^\circ = \text{Crd} 6^\circ = 6; 16; 49; 7; 59; \dots$ ، آن را بر ضریب وتر 6° یعنی ۳ تقسیم می‌کنیم تا نخستین خارج قسمت به دست آید. مکعبش باز بر ۳ تقسیم می‌شود. نتیجه به نخستین خارج قسمت افزوده می‌شود. سپس مکعب مقدار جدید دوباره بر ۳ تقسیم و به وتر 6° اضافه و این کار همچنان تکرار می‌شود.

به بیان دیگر، این همان روش تقریب تکراری برای یافتن وتر 2α بیان شده در بالاست. با تقریب اولیه به صورت $2^\circ = \text{Crd} 2^\circ = 0 = y_0$ ، عمل را تکرار می‌کنیم:



شکل ۴: تابع تکرار $y_{n+1} = \frac{(y_n)^2}{10800} + \frac{(\text{Crd} 60^\circ)}{3}$ خط $y = x$ را در مقدار $\text{Crd} 20^\circ$ قطع می‌کند.

$$y_{n+1} = \frac{(y_n)^2}{3 \times 60^2} + \frac{\text{Crd} 60^\circ}{3}$$

تا جایی که $\text{Crd} 20^\circ$ معلوم شود.

این روش عملاً تندتر از روش رقم به رقم اصلی همگرا می‌شود. مثلاً تقریب $\text{Crd} 20^\circ$ به جای هفت رقم شصتگانی درست، تنها پس از پنج تکرار به دست می‌آید. تابع تکرار درجه سوم در شکل ۴ دیده می‌شود و چون خط $y = x$ را تقریباً افقی قطع می‌کند، تقریب‌های متوالی را به سرعت به نقطه ثابت تقاطع می‌رساند. تحلیل کامل این اثر و منابع دوره اسلامی آن مستلزم مطالعه گسترده‌تری در مورد تعامل بین نجوم بین سانسکریت (جیوتیشا) و علم نجوم عربی/فارسی در دربار شاهان سده‌های ۱۱ و ۱۲ هجری در هند است.

منابع

- 1- Asger Aaboe, "al-Kāshī's iteration method for the determination of $\sin 1^\circ$ ", *Scripta Mathematica*, vol. 20, 1954, pp. 24-29.
- 2- J. L. Berggren, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, 2nd ed., Springer, New York, 2016.
- 3- R. C. Gupta, "On derivation of Bhāskara I's formula for the sine", *Gaṇita Bhāratī*, vol. 8, 1986, pp. 39-41.
- 4- Takanori Kusuba, "Bīrjandī: 'Abd al-'Alī ibn Muḥammad ibn Ḥusayn al-Bīrjandī", in Thomas Hockey et al., eds., *Biographical Encyclopedia of Astronomers*, Springer, New York, 2007, p. 127.

- 5- Takanori Kusuba and David Pingree, *Arabic Astronomy in Sanskrit: Al-Bīrjandī on Tadhkira II, Chapter 11 and its Sanskrit Translation*, Brill, Leiden, 2002.
- 6- Clemency Montelle and Kim Plofker, *Sanskrit Astronomical Tables*, Springer, Switzerland, 2018.
- 7- Kim Plofker, *Siddhanta-karaṇa* conversion: Some algorithms in the *Grahaṅītiādhyāya* of Bhāskara's *Siddhāntaśiromaṇi* and in his *Karaṇakutūhala*, *Gaṇita Bhāratī* 38 (2), 2016, pp. 93-110.
- 8- Kim Plofker, "The influence of Bhāskarācārya's works in 'westernized' Sanskrit mathematical traditions", *Gaṇita Bhāratī*, vol. 37 (1-2), 2015 (issued March 2016), pp. 97-109.
- 9- Boris Rosenfeld and Jan P. Hogendijk, "A mathematical treatise written in the Samarqand Observatory of Ulugh Beg", *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* 15, 2003, pp. 25-65.
- 10- Bāpūdeva Śāstrī, ed., *The Siddhāntaśiromaṇi* (rev. Gaṇapati Deva Śāstrī, Kashi Sanskrit Series 72), Chaukhambha Sanskrit Sansthan, Varanasi, 1989.
- 11- Shailesh Shirali, "The Bhāskara-Āryabhaṭa approximation to the sine function", *Mathematics Magazine*, April 2011, pp. 98-107.
- 12- K. S. Shukla, *Vaṭeśvarasiddhānta and Gola of Vaṭeśvara*, 2 vols., Indian National Science Academy, New Delhi, 1986.
- 13- Glen Van Brummelen, *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*, Princeton University Press NJ, 2009.
- 14- Glen Van Brummelen, Clemency Montelle, and Kim Plofker, *An Arabic commentary on the sines of Ulugh Beg and its 18th-century Sanskrit version*, forthcoming.