بسم الله الرحمن الرحیم

شمارهٔ استاندارد بین‌المللی
۲۳۲۲-۳۶۶۹

میراث علمی اسلام و ایران

دوفصلنامهٔ تاریخ علوم و فناوری دورهٔ اسلامی

سال هشتم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۳۹۸

شمارهٔ پیاپی: ۱۵

تصویر پشت جلد: روی جلد چاپ عکسی دستورالمنجمین، مؤسسهٔ پژوهشی میراث مکتوب، تهران، ۱۳۹۸.

نشانی مجله: تهران، خیابان انقلاب اسلامی، بین خیابان دانشگاه و ابوریحان، ساختمان فروردین، شمارهٔ ۱۱۸۲، طبقهٔ چهارم، شمارهٔ ۱۶
کد پستی: ۱۳۱۵۶-۹۳۵۱۹ تلفن: ۶۶۴۹۰۶۱۲ دورنگار: ۶۶۴۰۶۲۵۸

www.mirasmaktoob.ir
miraselmi@mirasmaktoob.ir / miraselmi90@gmail.com

بها: ۲۰۰۰۰۰ تومان

یادداشتی پیرامون قاعدهٔ ثابت بن قره دربارهٔ اعداد متحاب[1]

سونیا برنتیس[2] و یان پ. هوخندایک[3]
ترجمهٔ داود خجسته سالکویه[4]

دو عدد طبیعی n و m را متحاب گویند اگر مجموع مقسوم‌علیه‌های حقیقی هر یک برابر با دیگری باشد؛ یعنی مجموع مقسوم‌علیه‌هایی که از خود عدد کوچکترند.[5] یکی از جالب‌ترین نتایج حاصل شده در سنت ریاضی دورهٔ اسلامی، قاعدهٔ زیر برای اعداد متحاب است که ثابت بن قره (سدهٔ ۳هـ) آن را کشف و اثبات کرد.

اگر $p_1 = 2^{n+1} - 1 + 2^n$ و $p_2 = 2^{n+1} - 1 - 2^{n-1}$ و $p_3 = 2^{n+1} \cdot (2^{n+1} + 2^{n-2}) - 1$ سه عدد اول بزرگتر از ۲ باشند، آنگاه دو عدد $a_1 = 2^n p_1 p_2$ و $a_2 = 2^n p_3$ متحاب هستند.[6]

ثابت بن قره قاعده‌اش را در اثری با عنوان مقالة في استخراج الأعداد المتحابة بسهولة المسلک إلی ذلک بیان و اثبات کرد. اما چگونگی کشف این قاعده را نگفت. وان در واردن[7] طرز یافتن این قاعده را با روش‌های ریاضی امروزی نشان داده است.[8]

در این یادداشت بر پایهٔ متن اصلی عربی نشان می‌دهیم که چگونه ثابت بن قره توانست قاعده‌اش را کشف کند. این پرسش به چند دلیل جالب است. اولاً قاعدهٔ ثابت به هیچ وجه بدیهی نبود و فراتر از دانش نظریهٔ اعداد موجود در یونان باستان بود. ثانیاً قاعدهٔ فوق نه تنها به مقاله‌های حساب اصول اقلیدس، بلکه همچنین به سنت حسابی متأخر یونان که سمت‌گیری فلسفی داشت

1. “Notes on Thābit ibn Qurra and His Rule for Amicable Numbers”, *Historia Mathematica*, 16, 1989, pp. 373-378.
۲. Sonja Brentjes، پژوهشگر بازنشستهٔ تاریخ علم از مؤسسهٔ ماکس پلانک آلمان، brentjes@mpiwg-berlin.mpg.de
۳. Jan P. Hogendijk، تاریخ‌نگار ریاضیات و نجوم دانشگاه اوترخت هلند، J.P.Hogendijk@uu.nl
۴. عضو هیأت علمی دانشگاه گیلان (گروه ریاضی)، salkuyeh@gmail.com
۵. برای اطلاع بیشتر از کار ثابت بن قره دربارهٔ اعداد متحاب بنگرید به: ابوالقاسم قربانی، فارسی‌نامه، نشر هما، تهران، ۱۳۶۳، ص ۴۷-۵۹.
۶. برای بیان لفظی این قاعده توسط قطب‌الدین شیرازی و شعر محمدباقر یزدی دربارهٔ آن، بنگرید به پیوست در پایان این مقاله. م
7. Van der Waerden
۸. تاریخ جبر از خوارزمی تا امی نوتر، ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی اصل و علیرضا جمالی، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۷۶، ص ۲۷-۲۹.

وابسته است. نمونه‌ای از سنت اخیر، کتاب المدخل إلی علم العـدد[1] از نیکومـاخوس (ح ۱۰۰م) است. پس شاید تحلیل کشف ثابت بتواند درک تازه‌ای از چگونگی پیوند این دو سنت با ریاضیات دورهٔ اسلامی پدید آورد. سوم اینکه تحلیل کشف ثابت می‌توانـد موجـب درک بهتـری از سـاختار برهان ثابت بن قره در مقالة في استخراج الأعداد المتحابة بسهولة المسلک إلی ذلک شود.

ثابت در مقدمهٔ این رساله به اقلیدس، فیثاغورس و نیکوماخوس ارجاع می‌دهـد و اعـداد تـام، ناقص و زاید را ذکر می‌کند. عدد n تام است اگر $\sigma_\circ(n) = n$، ناقص است اگر $\sigma_\circ(n) < n$ و زاید است اگر $\sigma_\circ(n) > n$؛ در اینجا $\sigma_\circ(n)$ نماد رایج برای مجموع مقسـوم‌علیه‌های عـدد n غیـر از خودش است. به گفتهٔ ثابت بن قره، نیکوماخوس قاعده‌ای برای اعداد تام ذکر کرده بود و اقلیـدس این قاعده را ثابت کرد. اما هیچ‌یک از این دو، نامی از اعداد متحاب نبردند. ثابت می‌گوید برای پر کردن این خلأ می‌خواهد قاعده‌ای برای یافتن اعداد متحاب همراه با اثبات آن عرضه کند. یک منبع احتمالی جلب توجه ثابت بن قره به اعداد متحاب، شرح یامبلیخوس (سدهٔ ۴م) بـر المـدخل في علم العدد است. یامبلیخوس دو عدد متحاب ۲۲۰ و ۲۸۴ را ذکر می‌کند و می‌گوید:

> مقسوم‌علیه‌های هرکدام قادرند عدد دیگر را تولید کنند، مطابق آنچه فیثاغورس دربارهٔ دوستی گفته است. زیرا وقتی از او پرسیدند «دوست چیست؟» پاسخ داد «یک من دیگر» چنان که در این اعداد [متحاب] دیده می‌شود.

مقالهٔ ثابت بن قره دربارهٔ اعداد متحاب شامل ۱۰ قضیه است که آنها را می‌توان به چهار گروه ۱- ۴، ۵ -۶، ۷- ۹ و ۱۰ تقسیم کـرد. قضـیهٔ ۱۰ شـامل قاعـده و اثبـات آن اسـت. قضـیه‌های ۱- ۴ مقدماتی‌اند. قضیه‌های ۱ تا ۳ دربارهٔ مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های $n = ab$ است وقتی a و b عدد اول یا مرکب هستند و قضیهٔ ۴ مرتبط با خاصیتی از سری هندسی با نسبت $\frac{۱}{۲}$ است. قضیه‌های ۵ و ۶ با نمادگذاری امروزی چنین بیان می‌شوند:

۵- فرض می‌کنیم $a = ۲^n p$ که p اول است. آنگاه $\sigma_\circ(a) = ۲^{n+۱} - ۱ + ۲^n p - p$. بنابراین

اگر $p = ۲^{n+۱} - ۱$، آنگاه a کامل است،

اگر $p < ۲^{n+۱} - ۱$، آنگاه a زاید است،

اگر $p > ۲^{n+۱} - ۱$، a ناقص است.

این قضیه تعمیم زیبایی از قضیهٔ ۳۶ مقالهٔ نهم اصول اقلیدس است.

۶- فرض می‌کنیم $a = ۲^n p_۱ p_۲$ که $p_۱$ و $p_۲$ دو عـدد اول متمـایز و غیـر از ۲ هسـتند. اکنـون

---

[1] ترجمهٔ ثابت بن قره، چاپ بیروت، ۱۹۵۸.

فرض می‌کنیم $k = 2^{n+1} - 1 + (2^{n+1} - 1)(p_1 + p_2)$. پس $\sigma_0(a) = k + 2^n p_1p_2 - p_1p_2$.

بنابراین:

اگر $p_1p_2 < k$، آنگاه k زاید است.

اگر $p_1p_2 > k$، آنگاه a ناقص است.

ساختار این اثبات اقلیدسی است، یعنی برای تمام nها صادق است، اما در کتاب برای حالت $n = 4$ بیان شده است (بیان قضیهٔ ۱۰ نیز به همین صورت است).

قضیه‌های ۷- ۹ با نمادگذاری امروزی چنین بیان می‌شوند:

فرض می‌کنیم a، b، c و d اعداد طبیعی‌اند، چنان‌که $a : b : c : d = 1 : 2 : 4 : 8$. آنگاه:

۷) $c(c+d)(c+b) = cd(a+d)$

۸) $c(b+d+2c) = d(a+d)$

۹) $d(a+d-1) = c\{[d(a+d)-1]-(d+c-1)(b+c-1)\}$

قضیه‌های ۷ و ۸ برای اثبات قضیهٔ ۹ لازمند. قضیهٔ ۹ به نوبهٔ خود در اثبات قضیهٔ ۱۰ نقش مهمی دارد. بیان قضیهٔ ۱۰ با نمادگذاری امروزی چنین است:

فرض می‌کنیم $z = 1+2+2^2+\ldots+2^n$، $p_1 = z+2^n$، $p_2 = z-2^{n-1}$ و $p_3 = 2^{n+1}(2^{n+1}+2^{n-2})-1$.

قضیه: اگر p_1، p_2 و p_3 اعداد اول متمایز بزرگتر از ۲ باشند، آنگاه $a_1 = 2^n p_1p_2$ و $a_2 = 2^n p_3$ اعداد متحاب هستند.

ثابت بن قره با در نظر گرفتن سه تفاضل $a_2 - a_1$، $a_2 - \sigma_0(a_2)$ و $\sigma_0(a_1) - a_1$ ثابت کرد که $\sigma_0(a_1) = a_2$ و $\sigma_0(a_2) = a_1$. خلاصه‌ای از اثبات چنین است:

با توجه به قضیهٔ ۵، $a_2 - \sigma_0(a_2) = p_3 - (2^{n+1}-1) = 2^{n+1}[(2^{n+1}-1)+2^{n-2}]$.

ثابت از قضیهٔ ۶ با انجام عملیاتی[1] نتیجه می‌گیرد:

$$\sigma_0(a_1) - a_1 = 2^{n+1}[(2^{n+1}-1)+2^{n-2}]$$

اکنون تفاضل $a_2 - a_1 = 2^{2n}(p_3 - p_1p_2)$ را در نظر می‌گیرد. نخست p_2 را به صورت زیر بازنویسی می‌کند:

$$p_2 = 2^{n-1} + 2^n - 1 \qquad (1)$$

۱. برای این عملیات ابتدا به دست می‌آوریم: $p_1 = 3\times 2^n - 1$ و $p_2 = \frac{3}{2}\times 2^n - 1$. سپس نتیجه می‌شود: $p_1 + p_2 = \frac{9}{2}2^n - 2$ و $p_1p_2 = \frac{9}{2}2n - \frac{9}{2}2^n + 1$. اکنون با جایگذاری این مقادیر در قضیهٔ ۶، نتیجه حاصل می‌شود. م

و نتیجه می‌گیرد:

$$a_2 - a_1 = 2^n\{[2^{n+1}(2^{n-2} + 2^{n+1}) - 1] - (2^{n+1} + 2^n - 1)(2^{n-1} + 2^n - 1)\} \qquad (2)$$

پس بر اساس قضیهٔ ۹، با فرض $a = 2^{n-2}$، $b = 2^{n-1}$، $c = 2^n$ و $d = 2^{n+1}$،

$$a_2 - a_1 = 2^{n+1}[(2^{n-2} + 2^{n+1}) - 1]$$

در نتیجه، $a_2 - \sigma_0(a_2) = \sigma_0(a_1) - a_1 = a_2 - a_1$. بنابراین $\sigma_0(a_1) = a_2$ و $\sigma_0(a_2) = a_1$.

اکنون بر می‌گردیم به این سؤال که ثابت چطور توانست قاعده‌اش را پیدا و ثابت کند. این حدس طبیعی است که او نخست مقسوم‌علیه‌های دو عدد متحابه ۲۲۰ و ۲۸۴ که آنها را احتمالاً از منبعی قدیمی، شاید رسالهٔ یامبلیخوس می‌شناخت، بررسی کرده باشد. مقسوم‌علیه‌های $a_1 = 220$ عبارتند از $\{1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110\}$ و مقسوم‌علیه‌های $a_2 = 284$ عبارتند از $\{1, 2, 4, 71, 142\}$. او احتمالاً توجه کرده بود که می‌توان تناظر یک به یکی بین مقسوم‌علیه‌های ۲۸۴ و مجموعه‌ای شامل بعضی از مقسوم‌علیه‌های ۲۲۰ و مجموع‌هایی از بقیهٔ مقسوم‌علیه‌های ۲۲۰ برقرار کرد. تناظر فوق در جدول زیر نشان داده شده است:

۲۸۴ :	۱	۲	۴	۷۱	۱۴۲	$= 2 \times 71$
۲۲۰ :	۱	۲	۴	۵+۱۱+۵۵	۱۰+۲۲+۱۱۰	$= 2 \times (5 + 11 + 55)$

جدول ۱

پس رابطهٔ ۵+۱۱+۵۵=۷۱ معنی‌دار است.

بقیهٔ مقسوم‌علیه‌های $a_1 = 220$ یعنی ۲۰ و ۴۴ خاصیت‌های جالب زیر را دارند:

$$\sigma_0(a_1) - \sigma_0(a_2) = 20 + 44 = 4(5 + 11)$$

و همچنین $20 + 44 = 64 = a_2 - a_1 = 284 - 220 = 4 \times (71 - 55)$. می‌بینیم که رابطهٔ ۵+۱۱+۵۵=۷۱ بار دیگر ظاهر شده است.

پس شاید ثابت جستجوی خود را برای اعداد متحاب a_1 و a_2 دیگری با فرض $a_1 = 2^n p_1 p_2$ و $a_2 = 2^n p_3$ آغاز کرده باشد، با شرط اول بودن p_1 و p_2 و p_3 چنان‌که:

$$p_3 = p_1 p_2 + p_1 + p_2 \qquad (3a)$$

یا معادل آن

$$p_3 + 1 = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \qquad (3b)$$

در این صورت مقسوم‌علیه‌های a_2 مانند جدول ۱ متناظر خواهند بود با زیرمجموعه‌ای از مقسوم‌علیه‌های a_1 و به علاوه، مانند مثال بالا $a_2 - a_1 = \sigma_0(a_1) - \sigma_0(a_2)$.

مثال $a_۱ = ۲۲۰$ و $a_۲ = ۲۸۴$ را می‌توان بیشتر تحلیل کرد. داریم که $\sigma_۰(۲۲۰) = ۲۸۴ = ۴ \times ۷۱$. مجموع مقسوم‌علیه‌های ۲۲۰ در جدول ۱ به صورت $(۱+۲+۴)+۷۱\times۳$ است. بقیۀ مقسوم‌علیه‌های ۲۲۰ که در جدول ۱ نیامده، ۲۰ و ۴۴ است. پس خاصیت زیر معنی‌دار است.

$$۷۱ = (۲۰ + ۴۴) + (۱ + ۲ + ۴)$$

از اینجا هدایت می‌شویم به این حالت عمومی که

$$p_۳ = ۲^n (p_۱ + p_۲) + (۲^{n+۱} - ۱) \tag{۴a}$$

یا معادل آن:

$$p_۳ + ۱ = ۲^n [(p_۱ + ۱) + (p_۲ + ۱)] \tag{۴b}$$

اگر این شرایط برقرار باشد، مانند مثال فوق داریم $\sigma_۰(a_۱) = a_۲$.

چون ثابت در جستجوی ساختار کلی عددهای $p_۱$، $p_۲$ و $p_۳$ است، به معادلۀ سومی علاوه بر (۳a) و (۴a) (یا (۳b) و (۴b)) نیاز دارد. او احتمالاً این معادله را به روش زیر یافته است:

در حالت $a_۱ = ۲۲۰$، $a_۲ = ۲۸۴$، داریم $۱۱ = ۱ + ۵ \times ۲$ که با توجه به آن می‌توان نوشت:

$$۲p_۲ + ۱ = p_۱ \tag{۵a}$$

یا

$$۲(p_۲ + ۱) = (p_۱ + ۱) \tag{۵b}$$

اتحاد (۵a) در رسالۀ تکملة في الحساب ابومنصور بغدادی در محاسبۀ اعداد متحاب با شروع از زوج ۲۲۰ و ۲۸۴ آمده است. اتحاد (۵b) مرتبط است با حاصلضرب جفت عددهای صحیح متوالی، یعنی $۱\times۲=۲$، $۲\times۳=۶$ و $۳\times۴=۱۲$ که نقش مهمی در المدخل في علم العدد نیکوماخوس دارند. اگر دستگاه معادلاتی را که به صورت زیر حاصل می‌شود در نظر بگیریم،

$$p_۳ + ۱ = (p_۱ + ۱)(p_۲ + ۱) \tag{۳b}$$

$$p_۳ + ۱ = ۲^n [(p_۱ + ۱) + (p_۲ + ۱)] \tag{۴b}$$

$$۲(p_۲ + ۱) = p_۱ + ۱ \tag{۵b}$$

با استفاده از رابطه‌های (۳b) و (۴b) و با جایگذاری (۵b) داریم:

$$p_۱ = ۲^{n+۱} - ۱ + ۲^n \tag{۶}$$

$$p_۲ = ۲^n - ۱ + ۲^{n-۱} \tag{۷}$$

پس با توجه به رابطۀ (۴b) داریم:

$$p_3 = 2^{n+1}(2^{n+1}+2^{n-2})-1 \qquad (8)$$

اتحادهای ۶ و ۸ بسیار شبیه تعریف ثابت بن قره برای p_1 و p_3 است. ثابت در تعریف p_1 به جای $2^{n+1}-1$ از $1+2+\dots+2^{n}$ استفاده می‌کند و تعریف p_2 را به صورت

$$p_2 = (1+2+\dots+2^{n})-2^{n-1} \qquad (9)$$

می‌آورد. اما ضمن اثباتش دوباره p_2 را به صورت (۷) می‌نویسد.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که چرا او p_2 را با رابطهٔ (۹) مشخص کرد و چرا در تعریف p_1 و p_2، $1+2+\dots+2^{n}$ را به جای $2^{n+1}-1$ به کار برد. احتمالاً می‌خواست تا جایی که امکان دارد اعداد اول مورد نظرش را به روشی که در قضیهٔ ۳۶ مقالهٔ نهم اصول اقلیدس آمده است تعریف کند. در کتاب اصول اقلیدس ثابت شده است که اگر $p=1+2+\dots+2^{n}$، آنگاه $2^{n}p$ عددی تام است. پس او می‌خواست که p_1 و p_2 را همانند تعریف p در کتاب اصول اقلیدس تعریف کند. توجه کنید که ثابت در آغاز قضیهٔ ۱۰ خود صریحاً به تشابه با اعداد تام اشاره می‌کند.

بازسازی ما از کشف ثابت مبتنی بر قضیه‌های ۷ و ۸ در رسالهٔ ثابت است. این قضیه‌ها بدیهی‌اند و فی‌نفسه جالب نیستند، اما حضورشان را چنین می‌توان توضیح داد: در متن ثابت قضیهٔ ۹ برای هر سه عدد دلخواه a، b، c و d با شرط $a:b:c:d=1:2:4:8$ اثبات شده است، اما در قضیهٔ ۱۰ تنها حالت $a=2^{n-2}$، $b=2^{n-1}$، $c=2^{n}$ و $d=2^{n+1}$ به کار رفته است. قضیه‌های ۷ و ۸ مقدمات ساده‌ای برای قضیهٔ ۹ هستند و a، b، c و d در این سه قضیه یکسانند. پس برای حالت $a=2^{n-2}$، $b=2^{n-1}$، $c=2^{n}$ و $d=2^{n+1}$ تنها به قضیه‌های ۷ و ۸ نیاز داریم. اگر این مقادیر را در قضیه‌های ۷ و ۸ جایگذاری کنیم، حاصل می‌شود:

برای قضیهٔ ۷:

$$2^{n}(2^{n}+2^{n+1})(2^{n-1}+2^{n}) = 2^{n}\cdot 2^{n+1}(2^{n-2}+2^{n+1})$$

و برای قضیهٔ ۸:

$$2^{n}(2^{n-1}+2^{n+1}+2\cdot 2^{n}) = 2^{n+1}(2^{n+1}+2^{n-2})$$

با استفاده از تعاریف p_1، p_2 و p_3 داریم:

برای قضیهٔ ۷:

$$2^{n}(p_1+1)(p_2+1) = 2^{n}(p_3+1)$$

و برای قضیهٔ ۸:

$$2^{n}[(p_1+1)+(p_2+1)] = (p_3+1)$$

پس قضیه‌های ۷ و ۸ در بازسازی با رابطه‌های مهم (3b) و (4b) متناظرند.

بنابراین به نظر می‌رسد که ثابت قضیه‌های ۷ و ۸ را به عنوان قضایای جداگانه عرضه کرد، زیرا (۳b) و (۴b) نقش مهمی در کشف او دربارهٔ اعداد متحاب ایفا می‌کردند.

گزیدهٔ منابع:

- بغدادی، عبدالقاهر، التکملة في الحساب، تحقیق احمد سلیم سعیدان، کویت، ۱۴۰۶ق/ ۱۹۸۵م، منشورات معهد المخطوطات العربیة.
- Hogendijk, J. P., “Thābit ibn qurra and the pair of amicable numbers 17296, 18416”, *Historia Mathematica*, 12, 1985, pp. 269- 273.
- Saidan, A. S., *Amicable numbers by Thābit ibn Qurra*, Amman (publication sponsored by the Jordan University), 1977. [in Arabic]

پیوست

❖ قطب‌الدین شیرازی (سدهٔ ۷ هـ) قاعدهٔ ثابت بن قره را در کتاب درة‌التاج با عبـارات زیر بیان کرده است:

«و طریق استخراج متحابین آنکه از عددی زوج‌الزوج یکی کم کنیم و زوج الزوج ماقبل بر آن باقی افزاییم و زوج‌الزوج ماقبل آن هم از باقی نقصان کنیم، اگـر سـه عدد که از این سه عمل حاصل آید همه اول باشند، مضروب حاصـل ثـانی را در حاصل ثالث در زوج‌الزوج ماقبل ضرب کنیم تا اصغر متحابین حاصل آید. بعد از آن مجموع مضروب ثانی در ثالث را با ثانی و ثالث به شرط آنکه هم اول باشد در زوج‌الزوج ماقبل ضرب کنیم تا اعظم متحابین حاصل آید.»

❖ محمدباقر یزدی (سدهٔ ۱۱ هـ) در کتاب عیون‌الحساب بعد از مطلب ششـم از بـاب هفتم فصلی در استخراج عددهای متحاب دارد که در آن ابتدا همان قاعدهٔ ثابت بن قره را بیان کرده و بعداً قاعده‌ای نیز از خود نوشته است.

وی پس از بیان قاعدهٔ ثابت بن قره آن را به صورت زیر به شعر فارسی درآورده است:

زوج‌الزوجی در سه و در نصف سه زن[۱]   بی یک اگر اولند یک زان دو فکـن[۲]

در هم زن و جمله گر شد اول[۳]، آن زوج   در کل سه فـرد و حاصـل فـرد بزن[۴]

۱. یعنی عدد زوج‌الزوج 2^n را اختیار و 3×2^n و $3\times2^{n-1}$ را حساب کن.

۲. یعنی $p=(3\times2^{n-1}-1)$ و $q=(3\times2^n-1)$ را حساب کن (باید این دو عدد اول باشند).

۳. یعنی حاصلضرب pq را حساب کن. باید مجموع pq+p+q عدد اول باشد.

۴. یعنی $2^n\times pq$ و $2^n(pq+p+q)$ را حساب کن (این دو عدد متحاب هستند).

(برگرفته از کتاب فارسی نامه، نوشتهٔ ابوالقاسم قربانی، تهران، مؤسسهٔ نشر هما، ۱۳۶۳، ص ۴۲ و ۴۴)