برهان قسطا بن لوقا برای قاعدهٔ خطأین

محمد مهدی کاوه یزدی[۱]

مقدمه

قسطا بن لوقا بعلبکی (۲۴۸- ۳۰۰ق) فیلسوف، ریاضیدان، منجم، طبیب و مهندس مسیحی رومی الاصل بود. وی در بعلبک لبنان متولد شد و دوران کودکی و نوجوانی خود را در بغداد و در زمان حکومت مأمون (۱۹۸- ۲۱۸ق)، خلیفهٔ عباسی، سپری نمود. مأمون توجه خاصی به علم و دانش داشت و با برپایی مجالس بحث و مناظره و دعوت از دانشوران می‌کوشید اختلافات آن‌ها را برطرف کند. مأمون، علاوه بر این، بیت الحکمه را که در زمان هارون الرشید (۱۷۰- ۱۹۳ق) تأسیس شده بود، گسترش داد و تنی چند از دانشمندان عرب را به روم فرستاد و از فرمانروای آنجا درخواست کرد تا مجموعه‌ای از کتاب‌های کهن یونانی را نزد وی بفرستد.

قسطا بن لوقا برای تحصیل علم به روم مهاجرت کرد. او به زبان‌های یونانی، سریانی و عربی مسلط بود و بدین لحاظ یکی از کسانی بود که کار ترجمه و ویرایش آثار یونانی را به عهده داشت. وی بعضی از این آثار را ترجمه کرد و برخی از آن‌ها را که مترجمان دیگر ترجمه کرده بودند ویرایش نمود. قسطا بن لوقا همعصر یعقوب بن اسحاق کندی (۱۸۱- ۲۵۸ق)، فیلسوف بزرگ عرب، و ثابت بن قره (۲۲۱- ۲۸۸ق) بوده است.

در منابع مختلف آثار قسطا بن لوقا را متجاوز از ۹۲ عدد برشمرده‌اند که بسیاری از آن‌ها اکنون موجود نیست.[۲] از ۹۲ اثر وی، ۴۲ اثر در طب، ۱۱ اثر در ریاضیات و هندسه، ۸ اثر در نجوم، ۶ اثر در فیزیک و مکانیک، ۱۳ اثر در فلسفه و منطق و ۱۲ اثر در موضوعات مختلف است که از زبان یونانی به عربی ترجمه کرده است. از جملهٔ آثار او در ریاضیات و هندسه عبارت است از:

۱. کتاب في شکوک کتاب اقلیدس؛

۱. کارشناس ارشد تاریخ علم (ریاضیات)، mahkavyzd@yahoo.com

۲. ابن ندیم در الفهرست ۳۴ اثر از او بر شمرده است.

۲. كتاب في الاسطقسات؛
۳. كتاب في المدخل الي علم الهندسه؛
۴. كتاب في شكل الكرة والاسطوانة؛
۵. كتاب في حساب التلاقي علي جهة الجبر والمقابلة؛
۶. رسالة في استخراج مسائل عدديات من المقالة الثالثة من اقليدس؛
۷. كتاب في العمل بالكرة النجومية؛
۸. كتاب تفسير ثلاث مقالات ونصف من كتاب ديوفانتوس في المسائل العددية؛
۹. مقالة لقسطا بن لوقا في البرهان علي عمل حساب الخطأين؛
۱۰. ترجمهٔ عربی کتاب صناعة الجبر ديوفانتوس؛
۱۱. ترجمهٔ عربی کتاب الاکر ثاوذوسیوس.

اواخر عمر قسطا بن لوقا هم زمان با خلافت المقتدر بالله خلیفهٔ عباسی (۲۹۵- ۳۲۰ق) بود. لوقا در ارمینیه (ارمنستان کنونی) به سال ۳۰۰ق وفات یافت.[۱]

مقالة لقسطا بن لوقا في البرهان علي عمل حساب الخطأين

این مقالهٔ کوتاه شامل دو برهان برای روش خطأین در حل معادلات خطی است. قسطا بن لوقا در ابتدای مقاله می‌گوید که همهٔ مسائل حساب را که در آن‌ها جذر وجود نداشته باشد، می‌توان با این روش حل نمود و روش خطأین را «باب الجامع» نامیده است. وی پس از بیان یک مثال و حل مختصر آن، یک برهان عددی آورده تا چرایی تفاضل حاصل ضرب مفروض اول در خطای عدد دوم و حاصل ضرب مفروض دوم در خطای عدد اول را بیان کند. وی می‌گوید این تفاضل جوابی را که از ضرب مفروض اول در عدد خطای دوم به دست آمده است را متعادل می‌کند. برهان دوم هندسی است و در سه حالت دو خطای ناقص، دو خطای زاید و حالتی که یکی از خطاها ناقص و دیگری زاید است، اثبات شده است. قسطا بن لوقا در این اثبات‌ها از قضیهٔ دوم مقالهٔ ششم و قضیهٔ چهل و سوم مقالهٔ اول اصول اقلیدس استفاده کرده است.

نسخه‌های خطی رساله

در جلد پنجم کتاب تاریخ نگارش‌های عربی به دو نسخه یکی در کتابخانهٔ مرکزی آستان قدس رضوی و دیگری در اینديا آفیس اشاره شده[۲] که در کتاب زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی هم آمده است.[۳] در کتاب ریاضیدانان، منجمان و دیگر دانشوران تمدن اسلامی به چهار نسخه اشاره

---

۱. ابن ابی‌اصیبعه، ص ۳۲۹- ۳۳۰؛ ابن ندیم، ص ۴۴۴- ۴۴۵ و ۵۲۶؛ قربانی، ص ۳۴۸- ۳۴۹.

2. Sezgin, Band V, p. 286.

۳. زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، ص ۳۴۸- ۳۴۹.

شده و[1] در فهرستوارهٔ دستنوشت‌های ایران فقط نسخهٔ کتابخانهٔ آستان قدس رضوی آمده است.[2] در فهرستگان نسخه‌های خطی ایران علاوه بر نسخهٔ کتابخانهٔ مرکزی آستان قدس به نسخه‌ای در کتابخانهٔ ملی ملک هم اشاره شده است.

برای تصحیح متن رسالهٔ فوق از سه نسخهٔ زیر استفاده شده است:

۱. نسخهٔ شمارهٔ ۵۲۵۸/۴ کتابخانهٔ مرکزی آستان قدس رضوی[3]

این نسخه جزو یک مجموعه مشتمل بر شش برگ ۲۵ سطری به ابعاد ۱۵/۲ × ۷/۲ سم با کاغذ حنایی آهار مهره است که توسط کاتبی ناشناس کتابت شده و شامل پنج رساله و مقاله به شرح زیر است:

۱. تصحیح مسائل جبر ببرهان هندسی (ص ۱ و ۲: وجیزه‌ای است شامل سه اصل در دو صفحه از ثابت بن قره)؛

۲. موضحه (ص: ۲- ۶: رساله ایست در باب حساب جذر اصم از محمد بن عبدالعزیز هاشمی که برای امیر ابوالفضل جعفر بن المکتفی باللّه نوشته شده است)؛

۳. مسائل هندسیة (ص ۶- ۸: مقاله‌ای است مضاف بر رسالهٔ موضحه در اثبات مسائل جبر به یاری هندسه از همو)؛

۴. برهان خطأین (ص ۹- ۱۰: مقاله‌ای در برهان عمل خطأین از قسطا بن لوقا بعلبکی، فیلسوف نصرانی)؛

۵. متفرقات (ص ۱۰- ۱۳: هر یک در چند سطر تحت عنوان مسئله، في مسقط العمود وفوائد ملتقطة ومن کتاب ثمرة).

نسخه به خط نستعلیق تحریر خفی قرن یازده هجری کتابت شده و با «قال بعد کلام طویل ذکر في بیان اقسام الخطأین من کونهما زائدین وناقصین ومختلفین» آغاز و با «وهو المطلوب. تمّ البرهان» تمام می‌شود.

۲. نسخهٔ شمارهٔ IO Islamic 824.12 (مجموعهٔ دیوان هند) کتابخانهٔ بریتانیا[4]

این نسخه ضمن یک مجموعه شامل ۲۵ رساله با ۲۵۰ برگ ۱۷ سطری به ابعاد ۱۲/۷ × ۱۹/۷ سانتی‌متر است که توسط ملا احمد بن سلیمان گجراتی (متوفی ۱۰۵۹ق) در ذی الحجه سال ۱۱۳۴ق در بندر سورت به خط نستعلیق کتابت شده است. نسخه از روی برگ ۱۹۱ آغاز و تا پشت

1. Rosenfeld & Ihsanoğlu, *Mathematicians, Astronomers and other Scholars of Islamic Civilization*, Istanbul, 2003, p. 59, M1: Book Demonstrating the Calculus Operation of Two Errors, Cairo (riāḍa 702/3), London (Ind. 1043/12), Mashhad (5258/4), Oxford (I 913/34, 987/40).

۲. فهرستوارهٔ دستنوشت‌های ایران، ج ۲، ص ۴۷۷.

۳. گلچین معانی، ج ۸، ص ۳۹۰- ۳۹۱.

4. Loth, no. 1043, pp. 297- 299.

برگ ۱۹۳ ادامه می‌یابد و با «مقالة لقسطا بن لوقا في البرهان علي عمل حساب الخطأين وهو الباب الجامع الذي يستخرج به جميع المسائل الحساب الّتي لـيس لهـا جـذور» آغـاز و بـا «وهـو العـدد المطلوب. وذلک ما أردنا أن نبيّن» پایان می‌پذیرد. جای شکل‌ها در نسخه خالی است و اعداد درون آن هـم بـه شـنگرف اسـت. ششـمین رسـالهٔ ایـن مجموعـه مقالـهٔ ابوریحـان بیرونـی در موضـوع تناسب‌های هندی با نام راشیکات الهند است کـه نسخهٔ دیگر آن در کتابخانهٔ خـدابخش در پتنـه در ایالت بیهار هند وجود دارد.[۱] آخرین نسخهٔ آن هم خلاصة الحساب بهاءالدین عاملی است.

صفحهٔ آغازین رسالهٔ البرهان علی عمل حساب الخطأین، نسخهٔ خطی IO Islamic 824.12 (مجموعهٔ دیوان هند)

۳. نسخهٔ شمارهٔ ۳۲۳۷/۳ کتابخانهٔ ملی ملک[۲]

این نسخه ضمن یک مجموعه مشـتمل بـر ۷۳ برگ ۱۸ سطری بـه ابعـاد ۱۴/۸ × ۲۱/۶ سـانتی‌متر است که در قرن سیزدهم هجری[۳] توسط کاتب یـا کاتبان و به خط نسـخ روی کاغـذ فسـتقی کتابـت شده و شامل هفـت رسـاله بـا موضـوع ریاضـی و هندسه به شرح زیر است:

۱. رسالة في الجبر والمقابلة از ابوطاهر سراج الدین محمد بن عبدالرشـید سـجاوندی حنفـی (سدهٔ ۶ هجری)؛

۲. الموضحة از محمد بن عبدالعزیز هاشمی در حساب جذر اصمّ؛

۳. البرهان علي حساب الخطأين از قسطا بن لوقا بعلبکی؛

۴. تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیة از ثابت بن قره حرّانی؛

۵. تحریر الکرة و الأسطوانة از خواجه نصیرالدین طوسی؛

۱. نسخهٔ کتابخانهٔ خدابخش پیشتر نسخهٔ یکتا تصور می‌شد. مؤلف مقالهٔ حاضر تصحیح و ترجمهٔ این اثر را در سال ۱۳۸۹ش در مؤسسهٔ پژوهشی میراث مکتوب منتشر کرده است.

۲. فهرست نسخه‌های خطی کتابخانه ملی ملک، ج ۶، صص ۳۱۶-۳۱۸.

۳. در انتهای رساله‌های ششم و هفتم نام کاتب بدیع بن مصطفی الموسوی الإصفهانی الدرب امامی و تاریخ ۱۲۷۰ق آمده است.

۶. رسالة في كيفية تسطيح الكري از احمد بن محمد السرى (ابن صلاح همدانى)؛
۷. رسالة من التسطيح از محيى الدين محمد بن ابى الشكر مغربى اندلسى.

این نسخه با «قال بعد كلام طويل ذكر في بيان ...» آغاز و با «وهو العدد المطلوب. تمّ البرهان بحمداللّه وحسن توفيقه. وهو الموفق» پایان می‌یابد.

کارهای انجام‌شده روی رساله

ابو سعید جابر بن ابراهیم صابی (قرن چهارم هجری) شرحی بر این رسالهٔ قسطا بن لوقا با نام ایضاح البرهان علي حساب الخطأين نوشته که سه نسخهٔ خطی از آن در لیدن (Or. 14/3) ، بادلیان (Thurst 3970, 3/3) و کتابخانهٔ دانشگاه کلمبیا (Or. 30/10) موجود است.[1] ابوالقاسم قربانی به وجود نسخه‌ای از آن در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی اشاره کرده است.[2] ابن صلاح همدانی (د ۵۴۰ق) حاشیه‌ای بر کتاب جابر بن ابراهیم نوشته و یک اشتباه جابر را اصلاح کرده است.[3] هاینریش سوتر این اثر را تجزیه و تحلیل کرده است.[4] سوتر همچنین در سال ۱۹۰۸م مقالهٔ مستقلی راجع به رسالهٔ قسطا بن لوقا نوشته[5] که دارای یک مقدمه، سه بخش و یک شرح است. مقدمه راجع به نسخهٔ خطی‌ای است که مقاله از روی آن تهیه شده و همان نسخهٔ ایندیا آفیس است و به نسخهٔ دیگری از آن اشاره نکرده است. در بخش اول مقاله، ترجمهٔ روش عددی قسطا بن لوقا آمده و در پی آن سه حالت اثبات هندسی روش خطأین با رسم شکل و صرفاً در قالب کلمات بیان شده است. در بخش دوم چگونگی روش خطأین همراه با حل معادلهٔ $۴(x+۳)=۲۰$ آمده است. سپس توضیح داده شده که معادلاتی شبیه معادلهٔ $(x+۳)^۲-۵=۲۰$ و $۲\sqrt{x-۳}=\frac{x}{۲}$ به روش خطأین قابل حل نیستند، زیرا در آن‌ها مربع و جذر وجود دارد. در انتهای این بخش اشاره شده که فقط معادلاتی به روش خطأین قابل حل است که در آن‌ها منحصراً از اعمالی چون جمع، تفریق، تضعیف، تنصیف، ضرب و تقسیم استفاده شده باشد. در بخش سوم روش یک خطا توضیح داده شده است. در این روش ابتدا عدد دلخواهی (عدد مفروض) در نظر گرفته و نتیجهٔ حاصل از آن را با توجه به معادلهٔ داده شده به دست می‌آوریم و آن را در ذهن نگه می‌داریم (عدد محفوظ). سپس با داشتن عدد مفروض، عدد محفوظ و حاصل معادله و به کمک تناسب جواب معادله را پیدا می‌کنیم. سوتر برای

1. Sezgin, p. 254.

۲. قربانی، ص ۳۶- ۳۷.
۳. دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ج ۴، ص ۱۲۰.

4. Suter (1907-1908), pp. 24-27.
5. Suter (1908-1909), pp. 111-122.

مثال معادلهٔ $\frac{۱۲x}{۸}=۳$ را به سه روش حل کرده است که روش دوم و سوم آن همان روش یک خطا است. در روش دوم می‌گوید که برای حل معادلهٔ فوق عددی دلخواهی مانند ۴ در نظر می‌گیریم و آن را در معادله قرار می‌دهیم: $\frac{۱۲\times۴}{۸}=۶\neq۳$. برای پیدا کردن جواب معادله، حاصل را، که عدد ۳ است، در عدد مفروض، که ۴ است، ضرب کرده و حاصل ضرب، که ۱۲ است، را بر مقداری که به دست آورده بودیم (عدد ۶) تقسیم می‌کنیم. بنابراین جواب معادلـه برابـر بـا ۲ ($x=\frac{۴\times۳}{۶}=۲$) است. در روش سوم از تناسب استفاده می‌کند.

$$\frac{۱۲\times۴}{۸}=۶\neq۳\rightarrow\frac{۴}{x}=\frac{۶}{۳}\rightarrow x=\frac{۴\times۳}{۶}=۲$$

که دیده می‌شود دو روش فوق کاملاً مشابهند.

قسمت پایانی مقاله دارای سه بخش است. سوتر می‌گوید آنچه جابر بن ابراهیم در شرحش بر کار قسطا بن لوقا آورده است مطلب جدیدی ندارد و کار قسطا بن لوقا با توجه به زمان عرضهٔ آن بسیار باارزش‌تر است. همچنین توضیح می‌دهد که قسطا بن لوقا در مقاله‌اش صحبتی از روش یک خطا به میان نیاورده است. وی در ادامه بیان می‌کند که اثبات هندسی معادلاتی به صورت $ax \pm b = c$ مشابه اثباتی است که قسطا بن لوقا برای معادلهٔ $ax = b$ آورده و سپس به مطالبی که ابن بنا و قلصادی در مورد روش خطأین در آثارشان آورده‌اند اشاره می‌کند و می‌گوید که هیچ‌کدام آن‌ها اثباتی برای روش خطأین نیاورده‌اند و فقط به راه‌حل اشاره کرده‌اند. در پایان هم اشاره می‌کند که قسطا بن لوقا در اثبات عددی زیاد موفق نبوده و احتمال داده است که اشکال از نسخهٔ خطی باشد.

جین لوک شابرت[1] در کتاب تاریخ الگوریتم، از سنگ عقیق تا میکروچیپ[2] اثبات هندسی مقالهٔ قسطا بن لوقا را با استفاده از مقالهٔ سوتر آورده است.[3]

چگونگی تصحیح رساله

چون نسخهٔ کتابخانهٔ ایندیا آفیس از همه کامل‌تر است و تمام متن مقالهٔ قسطا بن لوقا را در بردارد به عنوان نسخهٔ اساس در نظر گرفته شده و در مواردی که لازم بوده از نسخه‌های دیگر نیز استفاده شده است. ترجمهٔ متن با استفاده از متن تصحیح شدهٔ رساله انجام شده است. در ضمن پایان برگ‌های نسخهٔ خطی هم درون علامت ابرو در متن آمده است. اعداد درون علامت قلاب هم کـه در مـتن مشاهده می‌شود مربوط به توضیحات و شرح مطالب رساله در بخش «پی‌نوشت‌ها» است.

1. Jean-Luc Chabert.
2. *A History of Algorithms, From the Pebble to the Microchip*.
3. Chabert, pp. 98- 101.


التي هي المال الثاني بلغ ذلك [illegible] فاذا قسمنا الستة والخمسين على [illegible] الذي كان
كان عليها القسمة عند امتحان المسألة خرج من ذلك مثل الثابتة مرة واحدة ومثل
الاربعة ومثل ثلثيها مرتين واما لما نريد ان نخرج مثل الثابتة مرة واحدة ومثل
الاربعة ومثل ثلثيها مرة واحدة فلما ضربنا خطاء المال الثاني وهو [illegible] في المال الاول
وهو [illegible] وقسمنا ذلك على [illegible] خرج مثل الاربعة ومثل ثلثيها مرة واحدة وعلمنا ان
هذا المقدار اعني حاصل ضرب [illegible] في [illegible] الذي هو خطاء المال الثاني في المال الاول
من [illegible] سقط عنا الفضل الذي كان معنا من الستة والخمسين وبقي اصل
المال الذي اذا قسم على [illegible] خرج المال المطلوب فهذه علة ضرب خطاء المال الاول في المال
الثاني وضرب خطاء المال الثاني في المال الاول ليعتدل بينهما خرج المال المطلوب فقد وضحنا
العلة في ضرب خطاء المال الاول في المال الثاني وضرب خطاء المال الثاني في المال الاول
ومثلنا ذلك بالمالين اللذين كان خطاءهما ناقصا وبمثل هذه الطريقة يجد الناظر
سبيلا الى تعرف العلة في المالين الزايدين خطاءهما والمالين اللذين احدهما زايد و
الاخر ناقص واما العلة الجامعة لجميع انواع هذا الباب الجامع فهي بعده واعلم ان كل مسئلة
من مسايل الحساب مفروضة النتيجة فالمطلوب منها انما هو العدد الذي منه
يكون تلك النتيجة وقد عرفنا كيف يستخرج بهذا الباب المسايل الحسابية التي لم يبين بها
ذكر شيء من الجذور فاما الآن فانا نستخرج جميع ما ذكرنا باستدلالنا هذا الباب في اتمام
المسئلة بالمالين المختلفين وضرب خطاء كل واحد منهما في المال الآخر وطرح الاقل من الاكثر [illegible]

صفحهٔ سوم نسخهٔ خطی البرهان علی عمل حساب الخطأین، به شمارهٔ IO Islamic 824.12 در دیوان هند

ترجمهٔ متن رساله

مقالهٔ قسطا بن لوقا در برهان [چگونگی] روش خطأین[۱] که روشی جامع است و به وسیلهٔ آن همهٔ مسائل حساب، که در آن‌ها جذر وجود ندارد، حل می‌شود.

بدان که هر مسئله‌ای از مسائل حساب دارای این خاصیت است که عددی در آن صدق می‌کند، اگر چه عدد مطلوب ممکن است از آن بزرگ‌تر یا کوچک‌تر باشد. اما اهل علم این نظر را درست می‌دانند که وقوف بر حقیقت جواب مسئله در نزد بسیاری از مردم در این روش نهاده شده که روش جامع نامیده می‌شود.

پس اگر کسی از شما مسئله‌ای در حساب بپرسد و حقیقت جواب مخفی باشد، این روش جامع را در آن به کار ببرید و به وسیلهٔ این روش به حقیقت جواب دست یابید. و آن [روش] اینکه دو عدد مختلف، هرچه باشد، در نظر بگیرید. سپس آن‌ها را به صورت مجزا در مسئله امتحان و {۱۹۱ر} خطاهای آن‌ها را مشخص کنید. پس اگر تساوی برقرار نشد، خطایی ایجاد شده که آن خطاها یا هر دو زایدند یا هر دو ناقصند یا آنکه مختلف هستند. پس اگر هر دو زاید یا ناقص شدند یکی را از دیگری کم کن، آنچه باقی ماند، باید بر آن تقسیم صورت گیرد. و اگر یکی از دو خطا زاید و دیگری ناقص باشد آن‌ها را جمع می‌کنیم که باید بر آن تقسیم صورت گیرد. سپس خطای عدد اوّل را در عدد دوم و خطای عدد دوم را در عدد اوّل ضرب می‌کنیم. پس از آنچه حاصل شد، [عدد] کمتر را از [عدد] بیشتر کم می‌کنیم یا آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم، مانند آنچه در مورد خطأین عمل شد. سپس این مجموع را، یا باقیمانده را، بر عددی که قبل از این برای تقسیم به دست آورده بودیم تقسیم می‌کنم، آنچه حاصل شود در حقیقت جواب مسئله است.[۲]

و **مثال** آن: اگر گفته شود که کدام عدد است که [مجموع] نصف و ربع آن برابر با ده شود؟ پس یکی از عددها را چهار و عدد دیگر را هشت در نظر می‌گیریم. پس خطای اوّل هفت و خطای دوم چهار می‌شود و طریقهٔ آن ظاهر و آشکار است و آن را رها می‌کنیم.[۳]

برای فهم و دریافت کامل و تام معرفت و علم به آن و علت ضرب خطای عدد اوّل در عدد دوم و ضرب خطای عدد دوم در عدد اوّل، اگر مسئله را با دو عدد چهار و هشت، که خطای هر دوی آن‌ها ناقص است، امتحان کنیم؛ و خطای چهار، هفت و خطای هشت، چهار باشد و تفاضل دو خطا سه و [تفاضل] دو عدد چهار باشد؛ در می‌یابیم که هر چهار [واحد] که بر عددی که در مسئله امتحان کرده بودیم اضافه کنیم، سه واحد به جواب صحیح نزدیک‌تر می‌شویم. و از این می‌فهمیم که هر

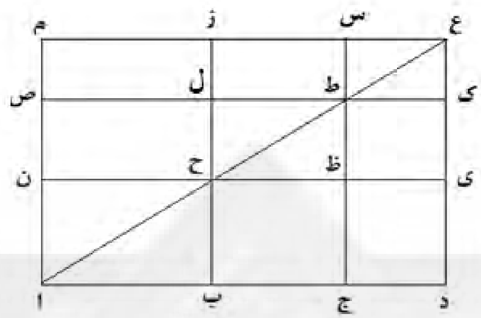
واحد از این سه، چهار برابر یک سوم است و هر واحد [عدد] چهار، یک و یک سوم است.[۴] و برای رسیدن [به] جواب درست، باید عدد بزرگ‌تر را با ضریب یک و یک سوم بیفزاییم و یک و یک سوم چهار، برابر با پنج و یک سوم است که اگر این را بر هشت بیفزاییم، مجموع سیزده و یک سوم می‌شود که یک و یک سوم حاصل است.[۵] پس اگر هفت را، که خطای اوّل است، در هشت، {۱۹۱ پ} که عدد دوم است، ضرب کنیم؛ حاصل پنجاه و شش می‌شود. پس اگر پنجاه و شش را بر سه -عددی که در وقت امتحان کردن مسئله بر آن [عمل] تقسیم انجام دادیم- تقسیم کنیم؛ خارج قسمت هشت و دو برابر چهار و چهار سوم می‌شود. و این در حالی است که هشت و چهار و یک سوم آن [چهار] را می‌خواستیم.[۶] پس خطای عدد دوم را، که چهار است، در عدد اوّل، که چهار است، ضرب کرده و این را بر سه تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت چهار و چهار سوم می‌شود. پس اگر این مقدار را، یعنی حاصل ضرب چهار در چهار را که [حاصل ضرب] خطای عدد دوم در عدد اوّل است، از پنجاه و شش کم کنیم، از این تفاضل که از پنجاه و شش بود، باقیمانده اصل عدد است که هرگاه بر سه تقسیم کنیم، خارج قسمت عدد مطلوب خواهد بود. پس این علت ضرب خطای عدد اوّل در عدد دوم است. پس ضرب خطای عدد دوم در عدد اوّل استخراج عدد مطلوب را متعادل می‌کند.[۷]

پس علت ضرب خطای عدد اوّل در عدد دوم و ضرب خطای عدد دوم در عدد اوّل را شرح دادیم و آن را با دو عددی که خطاهایشان ناقص بودند مثال زدیم. و با روشی مشابه این روش، خواننده راه شناخت علت در دو عدد که خطاهای آن‌ها زاید است و عددهایی که یکی از خطاهای آن زاید و دیگری ناقص است را در خواهد یافت. و اما علت کلی برای همهٔ انواع این روش جامع بعد از این خواهد آمد.

و بدان که هر مسئله از مسائل حساب با نتیجهٔ مفروض، جواب آن عددی است که از آن، این نتیجه به دست می‌آید.[۸] و کیفیت استخراج آن [جواب] را با این روش در مسائل حساب که در آن‌ها ذکری از جذر نشده باشد، شرح می‌دهیم. اکنون ما همهٔ آنچه را که در این روش به کار برده می‌شود با امتحان مسئله با دو عدد مختلف و ضرب خطای هر یک از آن دو در عدد دیگر و کم کردن مقدار کمتر از بیشتر یا جمع {۱۹۲ ر} آن‌ها و تقسیم بر تفاضل دو خطا، یا بر عددی که از جمع آن‌ها حاصل می‌شود، ذکر می‌کنیم. و توضیح آن از طریق هندسه صورت می‌گیرد و به صورتی تبیین می‌شود که دلالت بر آن کند.

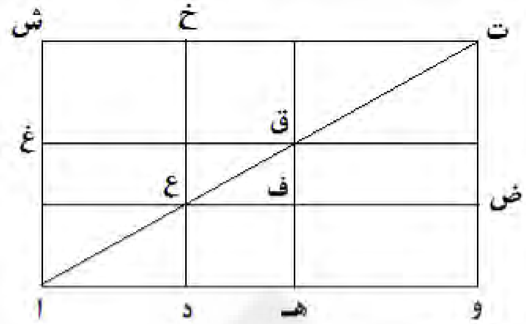
خطی مستقیم با طول نامشخص رسم می‌کنیم و روی آن **ا د** را، که عدد مطلوب است، جدا می‌کنیم (شکل ۱) و از نقطهٔ **د** خط **د ع** را، که نتیجهٔ مسئله است، عمود بر [امتداد **ا د**] اخراج می‌کنیم و **ا ع** را وصل می‌کنیم. پس اگر بخواهیم عدد مطلوب را، که خط **ا د** است، مشخص کنیم

در حالی که نتیجهٔ مسئله خط **د ع** است، پس [مسئله را] با دو عدد مختلف امتحان می‌کنیم، و بر طبق آنچه قبل از آن شرح دادیم، خللی [در اثبات] ایجاد نمی‌شود که هر یک از آن دو عدد بزرگ‌تر از آن باشند یا کوچک‌تر از آن یا اینکه یکی از آن‌ها بزرگ‌تر از آن باشد و دیگری کوچک‌تر از آن.



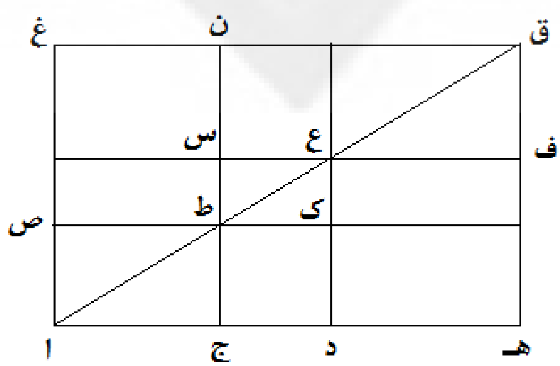
شکل ۱

پس اولاً فرض می‌کنیم که هر یک از آن‌ها کمتر از آن باشند و آن‌ها دو خط **ا ب**، **ا ج** هستند. و از دو نقطهٔ **ب**، **ج** دو عمود بر امتداد [**ا د**] اخراج می‌کنیم تا به خط **ا ع** برسد و آن‌ها **ب ح**، **ج ط** هستند. پس نسبت خط **ا د** به خط **د ع** برابر با نسبت خط **ا ج** به خط **ج ط** و برابر با نسبت خط **اب** به خط **ب ح** است. پس برآمد خط **ا ب** خط **ب ح** است و برآمد خط **ا ج**، خط **ج ط** است. و سطح **د م** را کامل می‌کنیم و از دو نقطهٔ **ط**، **ح** دو خط متوازی، موازی با خط **ا د** اخراج می‌کنیم که **ک ص**، **ن ی** هستند. و دو خط **ب ح**، **ج ط** را در راستایشان امتداد می‌دهیم تا به خط **م ع** در دو نقطهٔ **ز**، **س** برسند. پس عدد اوّل، خط **ا ب**، معلوم است و برآمد آن خط **ب ح** نیز معلوم است. و خطای آن از برآمد اول که **د ع** است، خط **ح ز** است که آن نیز معلوم است. و عدد دوم خط **ا ج** معلوم است و برآمد آن خط **ج ط** نیز معلوم است و خطای آن [خط] **ط س** معلوم است. و اگر خطای عدد اوّل را در عـدد دوم ضرب کنیم، از این [مساحت] سطح **م ظ** حاصل می‌شود. و اگر خطـای عـدد دوم را در عـدد اوّل ضرب کنیم، از این [مساحت] سطح **م ل** حاصل می‌شود. و اگر [مساحت] سطح **م ل** را، کمتر، از [مساحت سطح **م ظ**]، بیشتر، کم کنیم، [مساحت] عَلَم **ز س ظ ن ص ل** بـاقی مـی‌مانـد. ولـی [مساحت] سطح **ط ز** برابر با [مساحت] سطح **ی ط** است، متمم برابر با متمم، همچنان که {۱۹۲ پ} اقلیدس در مقالهٔ اوّل [اصول] تبیین کرده است؛ پـس [مسـاحت] سـطح **ی ص** مسـاوی بـا [مساحت کل] عَلَم **ز س ظ ن ص ل** است، که معلوم است، و عرض آن خط **ن ص** است، که معلوم است، و آن مساوی با خط **ظ ط** است که تفاضـل بـین یکـی از دو خطـا از دیگـری اسـت. و اگـر [مساحت] سطح **ی ص** را بر آن تقسیم کنیم، خارج قسمت خط **ی ن** است که معلوم می‌شود و آن مساوی با خط **ا د** است. پس مقدار خط **ا د** معلوم می‌شود که همان عدد مطلوب است.[۹]



شکل ۲

پس اگر هر یک از دو عددی که می‌خواهیم در مسئله امتحان کنیم، همچنان که در این شکل [شکل ۲] وضع شده است، بزرگ‌تر از عدد مطلوب باشند و آن دو، خطوط **ا هـ**، **ا و** باشند و هر یک از آن‌ها معلوم باشند و بزرگ‌تر از خط **ا د** باشند؛ پس اوّلاً خط **ا ع** را در همان امتداد تا نقطهٔ **ت** ادامه می‌دهیم و سطح **و ش** را تمام می‌کنیم. آنگاه عدد اوّل، خط **ا هـ**، معلوم است و برآمد آن خط **هـ ق** معلوم است و خطای آن زاید است و آن **ف ق** است، که معلوم است. و عدد دوم خط **ا و** معلوم است و برآمد آن خط **و ت** معلوم است و خطای آن **ض ت** معلوم است. از ضرب خطای عدد اوّل در عدد دوم [مساحت] سطح **ض غ** و از ضرب خطای عدد دوم در عدد اوّل [مساحت] سطح **ف ش** حاصل می‌شود. و اگر [مساحت سطح] کمتر را از بیشتر کم کنیم، باقی [مساحت] سطح **خ غ** است، زیرا [مساحت] سطح **خ ق** برابر با [مساحت] سطح **ق ض** است، متمم برابر با متمم. و اگر [مساحت] سطح **خ غ**، را که معلوم است، بر خط **ش غ**، که معلوم است، و برابر با تفاضل یکی از دو خطا از دیگری است، تقسیم کنیم؛ خارج قسمت خط **خ ش** است که معلوم می‌شود و آن مساوی با خط **ا د** است. پس خط **ا د** معلوم می‌شود که همان عدد مطلوب است.[۱۰]



شکل ۳

و اگر یکی از دو عددی که در مسئله امتحان می‌کنیم بزرگ‌تر و دیگری کوچک‌تر از عدد مطلوب باشد، همان طور که در این شکل (شکل ۳) در نظر گرفته‌ایم، دو خط **ا ج**، **ا هـ** باشند؛ پس **ا ج** معلوم و برآمد آن خط **ج ط** معلوم و خطای آن **ط س** معلوم است. و خط **ا هـ** معلوم و برآمد آن خط **هـ ق** معلوم و خطای آن خط **ف ق** معلوم است. پس اگر خطای عدد اوّل را در عدد دوم ضرب کنیم، از این [ضرب، مساحت] سطح **ف ص** حاصل می‌شود و اگر خطای عدد دوم را در عدد اوّل ضرب کنیم، از این [ضرب، مساحت] سطح **س غ** حاصل می‌شود. و اگر [مساحت] سطح **ف ص** و [مساحت] سطح **س غ** را جمع کنیم، از این [جمع، مساحت] سطح **ک غ** {۱۹۳ ر} حاصل می‌شود؛ زیرا [مساحت] سطح **ن ع** برابر با [مساحت] سطح **ف ک** است، متمم برابر با متمم. پس [مساحت] سطح **ک غ** معلوم می‌شود و اگر بر خط **ص غ** که مساوی با کل [مجموع] دو خطا است، تقسیم کنیم، خارج قسمت خط **ک ص** معلوم می‌شود که مساوی با خط **ا د** است. پس **ا د** معلوم می‌شود که همان عدد مطلوب است.[۱۱]

و این همان چیزی است که می‌خواستیم تبیین کنیم. {۱۹۳ پ}

پی‌نوشت‌ها

[۱]. قاعدهٔ خطأین

الف) پیشینه

از قدیم الایام انسان برای حل مشکلات و مسائلی که در زندگی‌اش رخ می‌داده با فکر و اندیشهٔ خود ابزارهایی ساخته و با آن‌ها مشکلات خود را بر طرف کرده است. در همین راستا بشر برای حل مسائل حساب نیز روش‌هایی ابداع کرده بود. این روش‌ها در همهٔ تمدن‌های باستان اعم از بابل، مصر، هند و چین به نحوی وجود داشته و نمی‌توان گفت کدام یک بر دیگری پیشی داشته است. معادلاتی که در دوران باستان مورد استفاده قرار می‌گرفته چه از نظر تعداد مجهولات و چه از نظر درجه محدود بوده است.

در پاپیروس ریند[۱] چند روش برای حل معادلات خطی درجهٔ اول آمده است. مسئلهٔ ۲۶ پاپیروس ریند در مورد پیدا کردن عددی است که مجموع آن با یک چهارم آن برابر با ۱۵ شود. برای حل این مسئله از روش یک خطا استفاده شده است؛ بدین طریق که ابتدا عدد دلخواهی مانند چهار در نظر گرفته و آن را در معادله قرار داده و جواب را، که ۵ است، به دست آورده. سپس ۱۵ را بر ۵ تقسیم کرده و خارج قسمت را، که ۳ است، در ۴ ضرب کرده و جواب ۱۲ را به دست آورده است. به زبان امروزی

1. Rhind Papyrus

اگر بخواهیم معادلهٔ $x + \frac{۱}{۴}x = ۱۵$ را به روش یک خطا حل کنیم، با فرض $x = ۴$ ، داریم:

$$x = ۴ \rightarrow ۴ + \frac{۱}{۴}(۴) = ۴ + ۱ = ۵ \rightarrow ۱۵ \div ۵ = ۳$$

$$\rightarrow ۳(۴) + \frac{۱}{۴}(۳ \times ۴) = ۳ \times ۵ \rightarrow ۱۲ + \frac{۱}{۴}(۱۲) = ۱۵ \rightarrow x = ۱۲$$

مسئلهٔ ۳۱ پاپیروس ریند در مورد یافتن عددی است که مجموع آن عدد با دو سوم و یک دوم و یک هفتم آن برابر با ۳۳ می‌شود. نویسنده برای حل مسئله ابتدا اعداد یک، دو سوم، یک دوم و یک هفتم، که ضرایب عدد مجهول هستند، را جمع نموده و سپس ۳۳ را بر آن تقسیم کرده است. مشابه این مسئله در پاپیروس مسکو هم وجود دارد. در آنجا این مسئله بدین صورت آمده است: کدام عدد است که اگر به یک و یک دوم برابر آن چهار واحد اضافه کنیم، حاصل ده می‌شود. برای حل مسئله، ابتدا چهار را از ده کم کرده و شش را به دست آورده است. سپس شش را در عدد دو سوم ضرب کرده و جواب را که چهار است به دست آورده است.

$$\left(۱\frac{۱}{۲}\right)x + ۴ = ۱۰ \rightarrow \frac{۳}{۲}x = ۱۰ - ۴ = ۶ \rightarrow \frac{۳}{۲}x = ۶ \rightarrow x = ۶ \times \frac{۲}{۳} = ۴$$

در ریاضیات بابلی نیز مسائل مشابهی وجود دارد. در لوح YBC4652 مسئله‌ای بدین صورت آمده است: سنگی پیدا کردم اما وزنش را نمی‌دانم. سپس یک هفتم آن را به آن اضافه کردم و بعد از آن یک یازدهم وزن کل آن را به آن که اضافه کردم، وزنش ۶۰ جین[۱] شد. وزن آن سنگ چقدر بوده است؟ جواب به دست آمده چهل و هشت و یک هشتم است.[۲]

$$\left(x + \frac{۱}{۷}x\right) + \frac{۱}{۱۱}\left(x + \frac{۱}{۷}x\right) = ۶۰ \rightarrow \frac{۱۲}{۱۱}\left(x + \frac{۱}{۷}x\right) = ۶۰$$

$$\rightarrow \frac{۸}{۷}x = \frac{۶۰ \times ۱۱}{۱۲} = ۵۵ \rightarrow x = \frac{۷ \times ۵۵}{۸} = ۴۸\frac{۱}{۸}$$

هندیان نیز از روش یک خطا و خطأین در حل معادلات آگاهی داشته‌اند. ابوریحان بیرونی در تحقیق ما للهند می‌گوید که هندیان از روش خطأین در کارهای نجومی استفاده می‌کرده‌اند.[۳]

روش خطأین اولین بار در چین در یک متن کلاسیک ریاضی باستانی به نام ژیو ژانگ سوان شو[۴] (نه فصل در هنر محاسبه، ۵۰ قبل از میلاد) آمده است. در این کتاب مسئله‌هایی مشابه مسئله‌های پاپیروس ریند وجود دارد. در مسئلهٔ اول این کتاب آمده است که: تعدادی از افراد برای خرید کالایی

---

۱. هر جین $\frac{۱}{۶۰}$ مینا (واحد وزن بابلی قدیم معادل ۵۰۰ گرم) بود.

2. Katz, pp. 14-15.

۳. کتاب تحقیق ما للهند ...، تصحیح زاخائو، لندن، ۱۸۸۷، ص۲۹۹–۳۰۰.

4. *Jiuzhang suanshu*

اقدام می‌کنند به طوری که اگر هر کس ۸ [A_1] واحد بپردازد، ۳ [B_1] واحد زیاد می‌آید و اگر هر کس ۷ [A_2] واحد بپردازد، ۴ [B_2] واحد کم می‌آید. تعداد افراد و قیمت کالا چقدر بوده است؟

مؤلف برای حل مسئله چنین عمل کرده است:

۱. دو مقدار A_1 و A_2 را در یک سطر نوشته و در زیر آن‌ها دو مقدار B_1 و B_2 را قرار داده است:

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{matrix}$$

۲. مقادیر را به صورت ضربدری در هم ضرب نموده و آن‌ها را با هم جمع کرده است: $A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2$ ؛

۳. دو مقدار سطر دوم را با هم جمع کرده است: $B_1 + B_2$ ؛

۴. حاصل اول را بر حاصل دوم تقسیم کرده تا مبلغی که هر کس باید بپردازد مشخص شود: $\frac{A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2}{B_1 + B_2}$ ؛

۵. دو مقدار A_1 و A_2 را از هم کم کرده است: $A_1 - A_2$ ؛

۶. حاصل اول را بر $A_1 - A_2$ تقسیم کرده تا قیمت کالا مشخص شود: $\frac{A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2}{A_1 - A_2}$ ؛

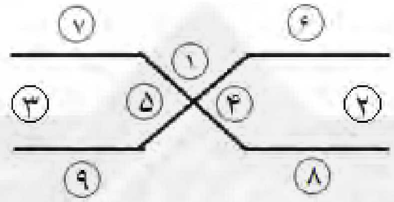
۷. حاصل دوم را بر $A_1 - A_2$ تقسیم کرده تا تعداد افراد مشخص شود: $\frac{B_1 + B_2}{A_1 - A_2}$.

بنابراین قیمت کالا ۵۳ واحد ($\frac{A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2}{A_1 - A_2} = \frac{۸ \times ۴ + ۷ \times ۳}{۸ - ۷} = ۵۳$) و تعداد افراد ۷ ($\frac{B_1 + B_2}{A_1 - A_2} = \frac{۳ + ۴}{۸ - ۷} = ۷$) است. مبلغی که هر نفر باید بپردازد هم $\frac{۵۳}{۷}$ واحد ($\frac{A_1 \times B_2 + B_1 \times A_2}{B_1 + B_2} = \frac{۸ \times ۴ + ۷ \times ۳}{۴ + ۳} = \frac{۵۳}{۷}$) است.[1]

از طریق جادهٔ ابریشم اطلاعات تمدن‌های قسمت‌های شرقی قارهٔ آسیا به حوزهٔ تمدن اسلامی وارد شده و از آنجا در طی قرون نهم تا سیزدهم میلادی به اروپا منتقل شده است. از اولین کسانی که به طور مشخص در زمینهٔ حساب خطأین مطلب نوشته قسطا بن لوقا است (رسالهٔ حاضر). پس از وی ابو کامل شجاع ابن اسلم (...–۳۱۸ق) کتاب الخطأین را نوشته که اکنون در دسترس نیست. جابر ابن ابراهیم (سدهٔ چهارم) شرحی بر رسالهٔ قسطا بن لوقا به نام ایضاح البرهان علي حساب الخطأین نوشته که چند نسخهٔ خطی از آن موجود است. ابوالحسن دسکری (پیش از اواسط قرن پنجم هجری) در طريقة في استخراج الخطأین، حاسب طبری (د ۴۸۵ق) در مفتاح المعاملات،

1. *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematics Ideas*, pp. 157- 160.

ابوعلی حبوبی (نیمهٔ دوم قرن چهارم هجری) در رسالهٔ الاستقصاء والتجنیس في علم الحساب، سموئل ابن یحیی (در حدود ۵۷۰ق) در کتاب الباهر في علم الحساب، علی بن یوسف منشی (سدهٔ پنجم و ششم) در لب الحساب و شرف‌الدین سمرقندی (۶۳۲ق) در رسالة في طریق المسائل العددیة از این روش برای حل مسائل مختلف استفاده کرده‌اند. ابن بنای مراکشی (۶۵۴-۷۲۱ق) در کتاب تلخیص اعمال الحساب روش خطأین را «حساب الکفات» نامیده است. او برای این کار شکلی به صورت شکل (۴) کشیده و آن را به ترازوی دو کفه‌ای تشبیه کرده است.



شکل ۴

ابن بنا برای حل معادلهٔ $ax = b$ به روش خطأین، عدد b را در مکان (۱)، مفروض اول را در (۲)، مفروض دوم را در (۳)، حاصل معادله به ازای مفروض اول را در (۴)، حاصل معادله به ازای مفروض دوم را در (۵) و مقدار خطا را در حالت اول اگر زاید بوده در (۶) و اگر ناقص بوده در (۸) و مقدار خطا در حالت دوم را اگر زاید بوده در (۷) و اگر ناقص بوده در (۹) قرار می‌داده است.[1] همین عمل را بعدها نویسنده‌ای هندی به نام دیوان کانهجی در کتابش خزانة العلم انجام داده است.[2] ابن هائم (۷۵۳- ۸۱۵ق) در تکملهٔ کتاب المقنع في علم الجبر والمقابلة که به صورت منظوم نوشته شده روش خطأین را آورده است. سعد بیهقی (زنده در ۷۲۲ق) بر کتاب شمسیة الحساب نظام اعرج نیشابوری تکمله‌ای به نام الجبر والخطأین نوشته و مسائلی را با این روش حل نموده است. قلصادی (۸۱۵- ۸۹۱ق) در باب دوم از جزو چهارم از کتاب کشف الجلباب عن علم الحساب روش خطأین را «عمل کفات» نامیده است. غیاث‌الدین جمشید کاشانی (؟- ۸۳۲ق) نیز در مقالهٔ پنجم مفتاح الحساب بخشی را به معرفی روش خطأین اختصاص داده و مسائل گوناگونی را در کتابش به این شیوه حل نموده است. علاءالدین قوشچی (؟- ۸۷۹ق) در رسالهٔ محمدیه از روش خطأین در حل مسائل مختلف استفاده کرده است. محمد باقر یزدی (زنده در ۱۰۴۹ق) در عیون الحساب مسائل فراوانی را به این شیوه حل کرده است.[3]

در اروپا اولین کسی که از این روش استفاده نموده لئوناردوی پیزایی یا فیبوناچی است. فیبوناچی

۱. ابن‌بنا، ص ۲۳۴- ۲۳۷.

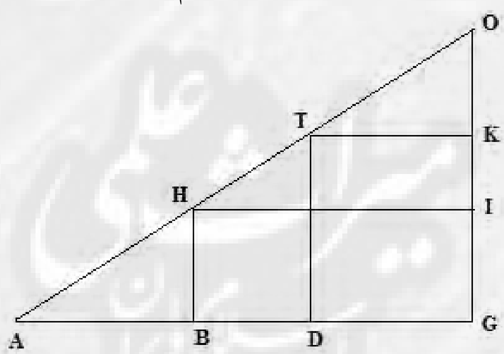
۲. کانهجی، باب هشتم، ص ۳۲۷- ۳۳۳.

۳. در تهیهٔ مطالب این قسمت از کتاب زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی استفاده شده است.

در بخش هفتم فصل دوازدهم کتاب خود، لیبر آباکی، ابتدا روش یک خطـا را توضـیح مـی‌دهـد و سپس در فصل سیزدهم به روش خطأین می‌پردازد. فیبوناچی در این بخش تعدادی مسئله آورده که برخی از آن‌ها مربوط به درختی است که قسمتی از آن درون خـاک قـرار دارد و او آن‌هـا را مسـائل درختی نامیده است. اولین مسئلهٔ آن چنین است: یک سوم و یک چهارم درختی زیر زمین قرار دارد. اگر طول قسمتی از درخت که زیر زمین قرار دارد ۲۱ واحد باشد، طول درخت چقدر است؟[1]

ب) روش یک خطا برای حل معادلهٔ $ax = b$

در شکل ۵ فرض می‌کنیم AD جواب معادله باشد و AB (یا AG) عددی باشد که در معادله قـرار داده‌ایم. AB عدد مفروضی است که از جواب معادله کوچک‌تر است و AG عدد مفروضی اسـت که از جواب معادله بزرگ‌تر است. پس $AB = g_1$ و $AG = g_2$. لازم به تذکر است که ما برای حل معادله به روش یک خطا به یکی از دو مفروض نیاز داریم.



شکل ۵

در نقطهٔ D عمودی بر امتداد AD اخراج کرده و روی آن به اندازهٔ b جدا می‌کنیم تا نقطـهٔ T بـه دست آید. نقطهٔ A را به نقطهٔ T وصل کرده و امتداد می‌دهیم. در نقـاط B و G نیـز عمودهـایی بـر امتداد AD اخراج می‌کنیم تا AT و امتداد آن را به ترتیب در نقاط H و O قطع نماید. از نقاط H و T خطوطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا GO را در نقاط I و K قطع نماید.

در مثلث قائم الزاویهٔ AGO در رأس G، چون BH و DT بر AD عمود رسم شده‌اند، پس بنابر قضیهٔ دوم مقالهٔ ششم اصول اقلیدس[2] داریم: $\frac{AB}{BH}=\frac{AD}{DT}=\frac{AG}{GO}$. بنابراین با جاگذاری مقادیر در تناسب فوق داریم:

1. Fibonacci, p. 454.

۲. اگر خط راستی موازی با یکی از ضلع‌های مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را به یک نسبت قطع می‌کند؛ و (بر عکس) اگر ضلع‌های مثلثی به یک نسبت قطع شده باشند، خط راست واصل بین نقطه‌های بریدگی با ضلع سوم مثلث موازی است (اصول اقلیدس، ص ۱۲۷).

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AB}{BH}=\frac{AD}{DT}\\ AB=g_۱, BH=a.g_۱,\\ AD=x, DT=b\end{array}\right\}\rightarrow \frac{g_۱}{a.g_۱}=\frac{x}{b}\rightarrow x=\frac{b.g_۱}{a.g_۱}$$

به همین صورت داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{AD}{DT}=\frac{AG}{GO}\\ AG=g_۲, GO=a.g_۲,\\ AD=x, DT=b\end{array}\right\}\rightarrow \frac{x}{b}=\frac{g_۲}{a.g_۲}\rightarrow x=\frac{b.g_۲}{a.g_۲}$$

مثال (مسئلهٔ ۲۶ پاپیروس ریند): می‌خواهیم معادلهٔ $x+\frac{۱}{۴}x=۱۵$ را به روش یک خطا حل کنیم.

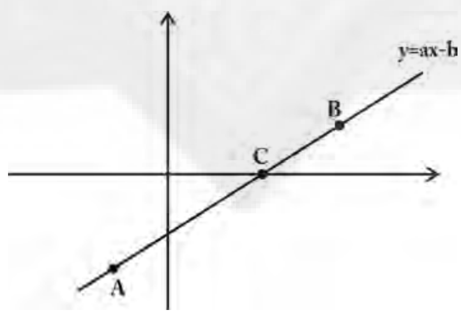
فرض می‌کنیم $g=۴$. بنابراین با جاگذاری آن در معادله داریم: $۴+\frac{۱}{۴}(۴)=۴+۱=۵$. پس

$$x=\frac{b.g}{a.g}=\frac{۱۵\times ۴}{\frac{۵}{۴}\times ۴}=\frac{۶۰}{۵}=۱۲$$

بنابراین جواب معادله برابر با ۱۲ است.

ج) روش خطأین برای حل معادلهٔ $ax=b$

نمودار تابع $f(x)=ax-b$ در دستگاه مختصات xoy خط $y=ax-b$ است. اگر $A(x_۱,f(x_۱))$ و $B(x_۲,f(x_۲))$ دو نقطهٔ دلخواه از خط فوق باشند و نقطهٔ $C(x_۳,f(x_۳))$ محل برخورد خط با محور طول‌ها باشد، آنگاه $f(x_۳)=۰$ و $x_۳$ ریشهٔ معادلهٔ $ax=b$ است.



شکل ۶

چون سه نقطهٔ A، B و C بر یک امتداد قرار دارند، پس شیب خطوط AB و BC برابر است. بنابراین

$$m_{AB}=m_{BC}\rightarrow \frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(x_۳)-f(x_۲)}{x_۳-x_۲}$$

اما چون $f(x_3)=0$، پس داریم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{0-f(x_2)}{x_3-x_2}\rightarrow x_3-x_2=\frac{-f(x_2)(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}\rightarrow x_3=x_2-\frac{f(x_2)(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

$$\rightarrow x_3=\frac{x_2(f(x_2)-f(x_1))-f(x_2)(x_2-x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

$$\rightarrow x_3=\frac{x_2.f(x_2)-x_2.f(x_1)-f(x_2).x_2+f(x_2).x_1}{f(x_2)-f(x_1)}$$

که با ساده کردن آخرین رابطه، به دستور

$$x_3=\frac{x_1.f(x_2)-x_2.f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} \qquad (1)$$

می‌رسیم که همان دستور حل معادلات به روش خطأین است.

در مورد دستور (۱) ذکر دو نکته ضروری است:

۱. برای آنکه به طور حتم به جواب برسیم لازم است که $f(x_1)\times f(x_2)<0$ به عبارت دیگر یکی از خطاها ناقص و دیگری زاید باشد. این مطلب از قضیهٔ مقدار میانی[1] در حساب دیفرانسیل و انتگرال ناشی می‌شود.

قضیهٔ مقدار میانی: «اگر تابع f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و عدد حقیقی k بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار داشته باشد، آنگاه حداقل یک عدد حقیقی مانند c در بازهٔ $[a,b]$ هست که $f(c)=k$».

در قضیهٔ فوق اگر $f(a)\times f(b)<0$ آنگاه حداقل یک عدد حقیقی مانند c در بازهٔ $[a,b]$ هست که $f(c)=0$ یعنی c ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ است.

۲. چون تابعی که در نظر گرفتیم و دستور (۱) را از آن استخراج نمودیم، از درجهٔ اول بود، پس با این روش فقط می‌توان معادلات درجهٔ اول را حل نمود. البته با تعمیم این روش می‌توان سایر معادلات را حل نمود که به روش نیوتن- رافسون معروف است و آنچه مهم است این است که ایدهٔ اصلی در هر دوی این روش‌ها یکسان است.

[۲]. چگونگی روش خطأین

برای حل معادلهٔ درجه اول $ax=b$ چنین عمل می‌کنیم:

۱. دو عدد دلخواه در نظر می‌گیریم و آن‌ها را مفروض اول (g_1) و دوم (g_2) می‌نامیم. برای انتخاب دو عدد بهتر است ابتدا جواب را حدس بزنیم و دو عدد را طوری انتخاب کنیم که یکی کوچک‌تر از آن عدد باشد و دیگری بزرگ‌تر از آن.

۲. مفروض اول و دوم را در معادله قرار داده و حاصل‌ها را به دست می‌آوریم: $w_1=ag_1$، $w_2=ag_2$.

1. Stewart, pp. 52- 53.

۳. تفاصل مقادیر به دست آمده را با حاصل معادله به دست می‌آوریم و آن را خطا می‌نامیم. در تفریق اعداد از هم همواره عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم مـی‌کنـیم. در اینجـا چهـار حالـت مختلف رخ خواهد داد:

ا) در صورتی که $c > w_1$ آنگاه مقدار $e_1 = c - w_1$ را خطای اول می‌نامیم که خطای ناقص است.
در صورتی که $c > w_2$ آنگاه مقدار $e_2 = c - w_2$ را خطای دوم می‌نامیم که خطای ناقص است.

ب) در صورتی که $c < w_1$ آنگاه مقدار $e_1 = w_1 - c$ را خطای اول می‌نامیم که خطای زاید است.
در صورتی که $c < w_2$ آنگاه مقدار $e_2 = w_2 - c$ را خطای دوم می‌نامیم که خطای زاید است.

ج) در صورتی که $c > w_1$ آنگاه مقدار $e_1 = c - w_1$ را خطای اول می‌نامیم که خطای ناقص است.
در صورتی که $c < w_2$ آنگاه مقدار $e_2 = w_2 - c$ را خطای دوم می‌نامیم که خطای زاید است.

د) در صورتی که $c < w_1$ آنگاه مقدار $e_1 = w_1 - c$ را خطای اول می‌نامیم که خطای زاید است.
در صورتی که $c > w_2$ آنگاه مقدار $e_2 = c - w_2$ را خطای دوم می‌نامیم که خطای ناقص است.

۴. حاصل ضرب مفروض اول در خطای دوم را محفوظ اول و حاصل ضـرب مفـروض دوم در خطای اول را محفوظ دوم می‌نامیم.

۵. در صورتی که خطاهای ایجاد شده در حالت اول و دوم همجنس باشند (هر دو ناقص یا زاید باشند)، تفاضل دو محفوظ را بر تفاضل دو خطا تقسیم می‌کنیم. با توجه به اینکه باید عدد کمتر را از عدد بیشتر کم کنیم یکی از چهار حالت زیر رخ می‌دهد:

$$x = \frac{g_1.e_2 - g_2.e_1}{e_1 - e_2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{g_1.e_2 - g_2.e_1}{e_2 - e_1} \quad \text{یا} \quad x = \frac{g_2.e_1 - g_1.e_2}{e_1 - e_2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{g_2.e_1 - g_1.e_2}{e_2 - e_1}$$

۶. در صورتی که خطاهای ایجاد شده در حالت اول و دوم همجـنس نباشـند (یکـی نـاقص و دیگری زاید باشد)، مجموع دو محفوظ را بر مجموع دو خطا تقسیم می‌کنیم.

$$x = \frac{g_1.e_2 + g_2.e_1}{e_1 + e_2}$$

[۳]. برای حل معادلهٔ $\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴}x = ۱۰$ به روش خطأین، فرض می‌کنیم $g_1 = ۴$. بنابراین

$$g_1 = ۴ \rightarrow w_1 = \frac{۱}{۲}(۴) + \frac{۱}{۴}(۴) = ۲ + ۱ = ۳ < ۱۰$$

پس خطای ناقص ۷ داریم، یعنی $e_1 = ۱۰ - ۳ = ۷$.

این بار فرض می‌کنیم $g_2 = ۸$، پس داریم:

$$g_2 = ۸ \rightarrow w_2 = \frac{۱}{۲}(۸) + \frac{۱}{۴}(۸) = ۴ + ۲ = ۶ < ۱۰$$

پس خطای ناقص ۴ داریم، یعنی $e_2 = ۱۰ - ۶ = ۴$.

[۴]. چون معادلهٔ $\frac{۱}{۲}x+\frac{۱}{۴}x=۱۰$ به صورت $\frac{۳}{۴}x=۱۰$ در می‌آیـد، پـس بـا فـرض $y=\frac{۳}{۴}x$ ملاحظه می‌کنیم که با افزایش هر واحد x، سه چهارم واحد به y افزوده می‌شود، به عبارت دیگر بـا افزایش هر چهار واحد x، مقدار y سه واحد افزایش می‌یابد. بنابراین با افزایش هر چهار واحد برای x، سه واحد به جواب اصلی نزدیک‌تر می‌شویم.

$$y=\frac{۳}{۴}x\rightarrow\begin{cases}g_{۱}=۰\rightarrow w_{۱}=۰\rightarrow e_{۱}=۱۰-۰=۱۰\\ g_{۲}=۴\rightarrow w_{۲}=۳\rightarrow e_{۲}=۱۰-۳=۷\\ g_{۳}=۸\rightarrow w_{۳}=۶\rightarrow e_{۳}=۱۰-۶=۴\\ g_{۴}=۱۲\rightarrow w_{۴}=۹\rightarrow e_{۴}=۱۰-۹=۱\end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که با افزایش هر چهار واحد برای x، خطا به میزان سه واحد کاهش می‌یابد.

[۵]. منظور $۴\times۱\frac{۱}{۳}=۴\frac{۴}{۳}=۵\frac{۱}{۳}$ است.

$$۱۰\times۱\frac{۱}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}=۸+۵\frac{۱}{۳}=\text{جواب مسئله}$$

[۶]. منظور این است که:

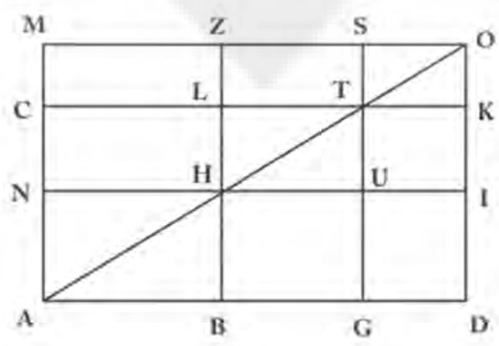
$$\frac{۷\times۸}{۳}=\frac{۵۶}{۳}=۱۸\frac{۲}{۳}=۸+۱۰\frac{۲}{۳}=۸+۲\left(۵\frac{۱}{۳}\right)=۸+۲\left(۴+۱\frac{۱}{۳}\right)=۸+۲\left(۴\frac{۴}{۳}\right)$$

[۷]. چون جواب $۱۸\frac{۲}{۳}$ به دست آمده و این در حالی است که جواب معادله $۱۳\frac{۱}{۳}$ بوده، پس برای حذف مقدار اضافه، یک سوم حاصل ضرب چهار در چهار، که برابر با حاصل ضرب مفروض دوم در خطای اول است، را از آن کم می‌کنیم. پس داریم:

$$\frac{۷\times۸}{۳}-\frac{۴\times۴}{۳}=\frac{۵۶}{۳}-\frac{۱۶}{۳}=۸+۲\left(۵\frac{۱}{۳}\right)-۵\frac{۱}{۳}=۸+۵\frac{۱}{۳}=۱۳\frac{۱}{۳}$$

[۸]. منظور این است که ریشهٔ هر معادله در آن معادله صدق می‌کند.

[۹]. حالت اول اثبات هندسی روش خطأین: حالتی که دو خطا ناقص هستند.



شکل ۷

با توجه به شکل ۷ فرض می‌کنیم AD جواب معادلهٔ $ax = b$ باشد. بر امتداد AD پاره‌خط‌های AB و AG را به طول‌های g_1 و g_2 (به عنوان مفروض‌های اول و دوم) اختیار می‌کنیم به طوری که هر دوی آن‌ها کوچک‌تر از AD باشند بنابراین داریم:

$$AD = x \quad , \quad AB(< AD) = g_1 \quad , \quad AG(< AD) = g_2$$

در نقطهٔ D عمودی بر امتداد AD اخراج می‌کنیم و روی آن نقطهٔ O را چنان اختیار می‌کنیم که $DO = b$. از نقطهٔ A به نقطهٔ O وصل می‌کنیم. این خط عمودهای مرسوم در نقاط B و G بر امتداد AD را در نقاط H و T قطع می‌نماید. (امتداد AO امتداد خط $y = ax - b$ است.) بنابراین طول پاره‌خط‌های BH و GT برابر با حاصل معادله به ازای مقادیر g_1 و g_2 است، یعنی $BH = a.g_1$ و $GT = a.g_2$.

در نقاط H و T دو خط به موازات امتداد AD رسم می‌کنیم. از نقاط A و O نیز خطوطی به موازات امتدادهای AD و DO رسم می‌کنیم تا مستطیل $\square ADOM$ حاصل شود. چون چهارضلعی $\square ADOM$ مستطیل است و خطوط به موازات اضلاع آن رسم شده‌اند، پس چهارضلعی‌های حاصل نیز مستطیل هستند. بنابراین داریم:

$$BH = BZ - HZ = DO - IO \rightarrow a.g_1 = b - e_1 \rightarrow e_1 = b - a.g_1$$

بنابراین طول پاره‌خط IO برابر با خطای ناقص e_1 است.

همچنین داریم:

$$GT = GS - TS = DO - KO \rightarrow a.g_2 = b - e_2 \rightarrow e_2 = b - a.g_2$$

پس طول پاره‌خط KO برابر با خطای ناقص e_2 است.

بنابراین داریم:

محفوظ اول = حاصل‌ضرب مفروض اول در خطای دوم = $g_1.e_2 = AB.KO = AB.LZ$

$= S_{\square MZLC}$

محفوظ دوم = حاصل‌ضرب مفروض دوم در خطای اول = $g_2.e_1 = AG.IO = NU.US$

$= S_{\square NUSM}$

بنابراین

تفاضل محفوظ اول و دوم = $g_2.e_1 - g_1.e_2 = S_{\square NUSM} - S_{\square MZLC} = S_{ZSUNCLZ}$

اما بنابر قضیهٔ ۴۳ مقالهٔ اول اصول اقلیدس[1] در مستطیل IOZH چون OH قطر است، پس مساحت دو مستطیل STLZ و IKTU برابر است. پس داریم:

۱. قضیهٔ ۴۳ مقالهٔ اول اصول اقلیدس: در هر متوازی‌الاضلاع متمم‌های متوازی‌الاضلاع‌های حول یک قطر با یکدیگر مساوی‌اند (اصول اقلیدس، ص ۳۴).

$$= S_{ZSUNCLZ} = S_{\square ZSTL} + S_{\square TCNU} = S_{\square IKTU} + S_{\square TCNU}$$ تفاضل محفوظ اول و دوم

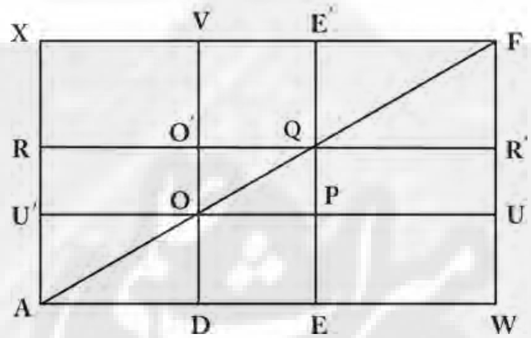
$$= S_{\square KCNI} = NI.IK = AD.(IO - KO) = x.(e_1 - e_2)$$

بنابراین داریم:

$$g_2.e_1 - g_1.e_2 = x.(e_1 - e_2) \rightarrow x = \frac{g_2.e_1 - g_1.e_2}{e_1 - e_2} \qquad (1)$$

بنابراین در حل معادلهٔ خطی $ax = b$ در صورتی که دو خطا ناقص باشند، از فرمول (۱) بـرای پیدا کردن مجهول استفاده می‌کنیم.

[۱۰]. حالت دوم اثبات هندسی روش خطأین: حالتی که دو خطا زاید هستند.



شکل ۸

با توجه به شکل ۸ فرض می‌کنیم AD جواب معادلهٔ $ax = b$ باشد. بر امتداد AD پاره‌خط‌های AE و AW را به طول‌های g_1 و g_2 اختیار می‌کنیم به طوری که هر دوی آن‌ها بزرگ‌تر از AD باشند ($AW > AD$ و $AE > AD$). بنابراین داریم:

$$AD = x, AW = g_2, AE = g_1$$

در نقطهٔ D عمودی بر امتداد AD اخراج می‌کنیم و روی آن نقطهٔ O را چنان اختیار می‌کنیم کـه $DO = b$. از نقطهٔ A به نقطهٔ O وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا عمودهای مرسوم در نقـاط E و W بر امتداد AD را در نقاط Q و F قطع نماید. (امتداد AF امتداد خط $y = ax - b$ اسـت.) بنـابراین طول پاره‌خط‌ها EQ و WF برابر با حاصل معادله به ازای مقادیر g_1 و g_2 است، یعنی $EQ = a.g_1$ و $WF = a.g_2$.

در نقاط Q و F دو خط به موازات امتداد AD رسم می‌کنـیم. از نقـاط A و F نیـز خطـوطی بـه موازات امتدادهای AD و DO رسم می‌کنیم تا مستطیل $\square AWFX$ حاصل شود. چون چهارضلعی AWFX مستطیل است و خطوط به موازات اضلاع آن رسم شده‌اند، پس چهارضلعی‌های حاصل نیز مستطیل هستند. بنابراین داریم:

$$EQ = EP + PQ = OD + PQ \rightarrow a.g_1 = b + e_1 \rightarrow e_1 = a.g_1 - b$$

بنابراین طول پاره‌خط EQ برابر با خطای زاید e_1 است.

همچنین داریم:

$$WF = WU + UF = DO + OV \rightarrow a.g_2 = b + e_2 \rightarrow e_2 = a.g_2 + b$$

پس طول پاره‌خط WF برابر با خطای زاید e_2 است.

بنابراین داریم:

محفوظ اول = حاصل‌ضرب مفروض اول در خطای دوم $= g_1.e_2 = AE.OV = U'P.U'X$
$= S_{\square U'PE'X}$

محفوظ دوم = حاصل‌ضرب مفروض دوم در خطای اول $= g_2.e_1 = AW.PQ = U'U.U'R$
$= S_{\square U'UR'R}$

بنابراین

تفاضل محفوظ اول و دوم $= g_1.e_2 - g_2.e_1 = S_{\square U'PE'X} - S_{\square U'UR'R}$

اما بنابر قضیهٔ ۴۳ مقالهٔ اول اصول اقلیدس در مستطیل VOUF چون OF قطر است، پس مساحت دو مستطیل 'QPUR و 'QE'VO برابر است. پس داریم:

تفاضل محفوظ اول و دوم $= S_{\square U'PE'X} - S_{\square U'UR'R} = S_{\square U'PE'X} - (S_{\square U'PQR} +$
$S_{\square PUR'Q}) = S_{\square U'PE'X} - S_{\square U'PQR} - S_{\square PUR'Q} = S_{\square U'PE'X} - S_{\square U'PQR} - S_{\square QO'VE'} =$
$S_{\square RO'VX} = RO'.O'V = AD.(UF - UR') = x.(e_2 - e_1)$

پس داریم:

$$g_1.e_2 - g_2.e_1 = x.(e_2 - e_1) \rightarrow x = \frac{g_1.e_2 - g_2.e_1}{e_2 - e_1} \qquad (۲)$$

بنابراین در حل معادلهٔ خطی $ax = b$ در صورتی که دو خطا زاید باشند، از فرمول (۲) برای پیدا کردن مجهول استفاده می‌کنیم.

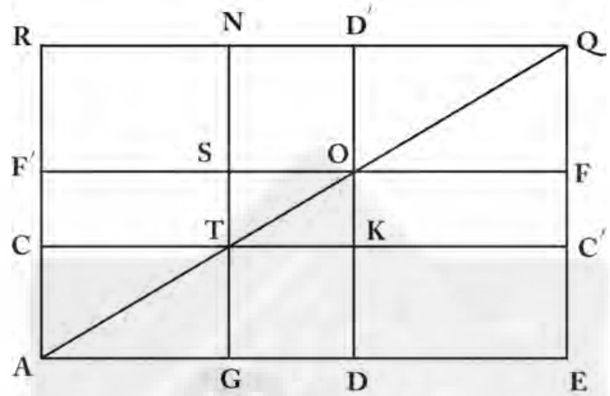
[۱۱]. حالت سوم اثبات هندسی روش خطأین: حالتی که یکی از خطاها زاید و دیگری ناقص است.

AG و AE را به طول‌های g_1 و g_2 اختیار می‌کنیم به طوری که یکی از آن‌ها کوچک‌تر از AD باشد و دیگری بزرگ‌تر از آن ($AG < AD$ و $AE > AD$). بنابراین:

$$AD = x, AG = g_1, AE = g_2$$

در نقطهٔ D عمودی بر امتداد AD اخراج می‌کنیم و روی آن نقطهٔ O را چنان اختیار می‌کنیم که $DO = b$. از نقطهٔ A به نقطهٔ O وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا عمودهای مرسوم در نقاط G و

E بر امتداد AD را در نقاط T و Q قطع نماید. (امتداد AQ امتداد خط $y = ax - b$ است.) بنابراین طول پاره‌خط‌های GT و EQ برابر با حاصل معادله به ازای مقادیر g_1 و g_2 است، یعنی $GT = a.g_1$ و $EQ = a.g_2$.



شکل ۹

با توجه به شکل ۹ فرض می‌کنیم AD جواب معادلهٔ $ax = b$ باشد. بر امتداد AD پاره‌خط‌های در نقاط T و O دو خط به موازات امتداد AD رسم می‌کنیم. از نقاط A و Q نیز خطوطی به موازات امتدادهای AD و DO رسم می‌کنیم تا مستطیل $\square AEQR$ حاصل شود. چون چهارضلعی AEQR مستطیل است و سایر خطوط به موازات اضلاع آن رسم شده‌اند، پس سایر چهارضلعی‌های درون شکل هم مستطیل هستند. بنابراین داریم:

$$ST = SG - GT = OD - GT = b - a.g_1 = e_1$$

بنابراین طول پاره‌خط ST برابر با خطای ناقص e_1 است.

همچنین داریم:

$$FQ = EQ - EF = EQ - DO = a.g_2 - b = e_2$$

پس طول پاره‌خط FQ برابر با خطای زاید e_2 است.

بنابراین داریم:

محفوظ اول = حاصل ضرب مفروض اول در خطای دوم $= g_1.e_2 = AG.QF = SF'.SN = S_{\square SF'RN}$

محفوظ دوم = حاصل ضرب مفروض دوم در خطای اول $= g_2.e_1 = AE.ST = CC'.FC' = S_{\square FC'CF'}$

بنابراین

مجموع محفوظ اول و دوم $= g_1.e_2 + g_2.e_1 = S_{\square SF'RN} + S_{\square FC'CF'} = S_{RNSFC'CF'R}$

اما بنابر قضیهٔ ۴۳ مقالهٔ اول اصول اقلیدس در مستطیل NQC'T چون TQ قطر است، پس مساحت دو مستطیل KC'FO و OSND' برابر است. بنابراین با کم کردن مستطیل KC'FO از چند ضلعی RNSFC'CF'R و به جای آن اضافه کردن مستطیل OSND'، مستطیل یک دست CKD'R حاصل می‌شود. پس داریم:

$$\text{مجموع محفوظ اول و دوم} = S_{RNSFC'CF'R} = S_{\square CKD'R} = CK.KD' = AD.(KO + OD')$$

$$= AD.(ST + FQ)$$

با جاگذاری مقادیر AD، ST، SQ در رابطهٔ فوق داریم:

$$g_1.e_2 + g_2.e_1 = x.(e_1 + e_2) \rightarrow x = \frac{g_1.e_2 + g_2.e_1}{e_1 + e_2} \qquad (۳)$$

بنابراین در حل معادلهٔ خطی $ax + b$ در صورتی که یکی از دو خطا ناقص و دیگری زاید باشد، از فرمول (۳) برای پیدا کردن مجهول استفاده می‌کنیم.

منابع

۱. ابن ابی اصیبعه، عیون الأنباء في طبقات الأطباء، شرح و تحقیق: دکتر نزار رضا، بیروت، دار مکتبة الحیاة، بی تا؛

۲. ابن بنا، تلخیص اعمال الحساب، نسخهٔ خطی شمارهٔ Ljs 481 کتابخانهٔ دانشگاه پنسیلوانیا؛

۳. ابن ندیم، محمد بن اسحاق، الفهرست، ترجمهٔ محمد رضا تجدّد، چاپ اول، تهران، انتشارات اساطیر، ۱۳۸۱؛

۴. افشار، ایرج، دانش پژوه، محمد تقی، فهرست نسخه‌های خطی کتابخانهٔ ملی ملک (وابسته به آستان قدس رضوی)، ج ۶، چاپ اول، انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۶۶؛

۵. دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، زیر نظر کاظم موسوی بجنوردی، ج ۴، مدخل: «ابن صلاح، نجم‌الدین ابوالفتح احمد بن محمد بن سری بن صلاح همدانی»، نوشتهٔ علیرضا جعفری نائینی، تهران، انتشارات مرکز دائرةالمعارف بزرگ اسلامی، ۱۳۷۰؛

۶. درایتی، مصطفی، فهرستگان نسخه‌های خطی ایران، ج ۱۲، تهران، سازمان اسناد و کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران، ۱۳۹۱،

۷. همو، فهرستوارهٔ دست‌نوشت‌های ایران، ج ۲، تهران، کتابخانه، موزه و مرکز اسناد مجلس شورای اسلامی، ۱۳۸۹؛

۸. قربانی، ابوالقاسم، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، چاپ دوم، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۵؛

۹. قسطا بن لوقا، نسخهٔ شمارهٔ IO Islamic 824.12 (مجموعهٔ دیوان هند) کتابخانهٔ بریتانیا؛

۱۰. کانهجی، دیوان، خزانة العلم در فن حساب، کلکته، مؤسسهٔ چاپ میشن، ۱۸۳۷ م؛

۱۱. گلچین معانی، احمد، فهرست کتب خطی کتابخانهٔ آستان قدس رضوی، ج ۸، مشهد، انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۵۰؛

۱۲. هیث، تامس لیتل، اصول اقلیدس، ترجمهٔ دکتر محمد هادی شفیعیها، چاپ اول، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۷؛

13. Chabert, Jean-Luc, *A History of Algorithms: From the Pebble to the Microchip*, English translator: Chris Weeks, Berlin, Springer- Verlag, 1999;

14. Fibonacci, Leonardo, *Fibonacci's Liber Abaci*, Trans. By Laurence Sigler, New York, Springer- Verlag, 2003;

15. *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematics Ideas*, Edited by Yvonne dold-Samplonius, Joseph W. Dauben, Menso Folkerts, Benno Van Dalen, Stuttgart, Franz Steiner Verlag, 2002;

16. Katz , Victor J.: *A History of Mathematics*, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc, 2nd Edition, 1998;

17. Loth, Otto.: *A catalogue of the Arabic manuscripts in the Library of the India Office*, (vol. I). London, 1877.

18. Sezgin, Fuat.: *Geschichte der arabischen Schrifttums*, Leiden, E. J. Brill, Band V, 1974;

19. Stewart, James.: *Essential Calculus*, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2nd Edition, 2013;

20. Suter, Heinrich.: Die Abhandlung Qosta ben Luqas und zwei andere anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl , *Bibliotheca Mathematica*, Teubner, Leipzig, 3. Folge, vol. 9, 1908- 1909;

21. Suter, Heinrich.: Einige Geometrische Aufgaben bei Arabischen Mathematikern, *Bibliotheca Mathematica*, Teubner, Leipzig, 3. Folge, vol. 8, 1907- 1908.