مقاله

مروری بر پژوهش‌های انجام شده در تاریخ ریاضیات دورۀ اسلامی از ۱۹۹۶ تا ۲۰۱۱ میلادی

گلن وان بروملن[۱]
ترجمۀ پویان رضوانی

مقدمه

دو اثر مروری لن برگرن دربارۀ ریاضیات دورۀ اسلامی، حجم زیادی از منابع را در هم آمیخته است[۲]. گسترۀ «ریاضیات» از نظر نویسندۀ این دو مقاله چنان است که با شاخه‌هایی چون نورشناسی، جغرافیا و نجوم هم‌پوشانی دارد.

به‌علاوه، این دو مقالۀ مروری، پرسش‌هایی را دربارۀ منابع مربوط به انتقال، تفاوت‌های محلی، و موضوع درک افول علم در دوره‌های متأخر، بازشناسی می‌کند. طی پانزده سال پس از آخرین مقالۀ مروری در سال ۱۹۹۵، بسیاری از شاخه‌های علمی و مباحث مشابه همچنان مورد توجه بودند، اما بسیاری چیزها تغییر کرد. این شاخۀ علمی، به‌طور افزاینده‌ای تخصصی شد. این روند تا حدی از طریق ظهور راه‌های جدید انتشار رخ داد. دو مجلۀ جدید به تاریخ ریاضیات و علوم در دورۀ اسلامی اختصاص یافت: سهیل (که توسط دانشگاه بارسلون منتشر می‌شود) و مجلۀ ایرانی تاریخ

۱. عضو هیئت علمی دانشگاه کوئست، کانادا، gvb@questu.ca

۲. این دو مقالۀ برگرن با عنوان‌های

“History of Mathematics in the Islamic World: the Present State of the Art” [1985]
“Mathematics and Her Sisters in Medieval Islam: A Selective Review of Work Done from 1985 to 1995” [1997]

به همراه مقالۀ حاضر با عنوان

“A Survey of Research in the Mathematical Sciences in Medieval Islam from 1996 to 2011”

در کتاب *From Alexandria, through Baghdad* (از اسکندریه تا بغداد) منتشر شده‌اند (نگاه کنید به خبرنامۀ تاریخ علم، شمارۀ سیزدهم، ص ۱۲). ترجمۀ مقالۀ اول با عنوان «پژوهش‌های انجام شده در تاریخ ریاضیات دورۀ اسلامی تا سال ۱۹۸۵ میلادی» به‌وسیلۀ فاطمه سوادی و محمد باقری در شمارۀ چهارم مجلۀ میراث علمی اسلام و ایران و ترجمۀ مقالۀ دوم با عنوان «بررسی گزیده‌ای از پژوهش‌های منتشر شده در تاریخ ریاضیات دورۀ اسلامی و علوم وابسته به آن از ۱۹۸۵ تا ۱۹۹۵ میلادی» به‌وسیلۀ حمید بهلول در شمارۀ پنجم این نشریه منتشر شده است. مقالۀ حاضر را می‌توان بخش سوم و پایانی این نوشتارهای رهگشا و راهنما در تاریخ ریاضیات دورۀ اسلامی دانست. مشخصات منابع مذکور در مقاله که به‌صورت [سال انتشار] آمده در پایان مقاله عرضه شده است.- م

علم که عرصه‌های منظمی را برای انتشار این پژوهش‌ها فراهم می‌کنند. اسکیاموس (منابع و شرح‌ها در علوم دقیق) [نیز] به‌تمامی فرهنگ‌های گذشته اختصاص دارد و شامل متن‌های عربی بسیار می‌شود. دو مجلهٔ تخصصی که از قبل چاپ می‌شدند (علم و فلسفهٔ عربی و مجلهٔ تاریخ علوم عربی- اسلامی) و همچنین چندین نشریهٔ ادواری دیگر با گسترهٔ موضوعی وسیع‌تر نیز از همین دستند، پس می‌بینیم فرصتی بهتر از این برای جستجوی مطالب مربوط به دورهٔ اسلامی وجود نداشته است. چنانکه خواهیم دید، با اینکه سؤالات اصلی کم‌تر شده‌اند، مباحث جدیدی مطرح شده‌اند که پرسش‌هایی بنیادی‌تر دربارهٔ اینکه چرا این پژوهش‌ها را انجام می‌دهیم، چگونه باید این کار را انجام دهیم و چه چیزی باید بنویسیم، مطرح می‌کنند. با افزایش حجم منابع و تغییر مسیر فضای دانشگاهی از سال ۱۹۹۵، روشن است که مروری جدید نیز بایسته است.

حجم زیاد آثار علمی جدید که مورد بحث ما قرار می‌گیرند، ما را ناگزیر از اختصار می‌کند. [در همین راستا] نخست اینکه، پیرو دو مقالهٔ مروری برگرن، خود را محدود به پژوهش‌هایی می‌کنیم که دست کم بخشی از آن‌ها به زبان‌های اروپایی منتشر شده‌اند، و به پژوهش‌هایی که کلاً به زبان‌های روسی، عربی یا فارسی چاپ شده‌اند نمی‌پردازیم. دوم اینکه بیشتر بر پژوهش‌های اصیلی تمرکز خواهیم کرد که تنها گاهی به مقاله‌های پژوهشی ارجاع می‌دهند، و نه بر مقاله‌های دایرةالمعارفی بسیاری که از سال ۱۹۹۵ به بعد نوشته شده‌اند. در این تحدید، چهار منبع حذف شده‌اند، با این حال توجه خوانندگان باید به آن‌ها جلب شود. این منابع عبارتند از: ۱- مجموعهٔ حجیم ۱۲۰ جلدی ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی که توسط مؤسسهٔ تاریخ علوم عربی- اسلامی در فرانکفورت منتشر شده است، و عملاً تمامی منابعی را که تا سال ۱۹۶۰ در این زمینه چاپ شده‌اند فراهم ساخته است. ۲- مجموعهٔ سه جلدی دایرةالمعارف تاریخ علوم دورهٔ اسلامی [راشد و مورلون، ۱۹۹۶] که سی مقالهٔ مروری آن‌ها مطالب زیادی را دربارهٔ علوم ریاضی شامل می‌شود؛ ۳- کتاب مرجع حجیم روزنفلد و احسان‌اوغلو دربارهٔ سرگذشت و کتابشناسی [دانشمندان دورهٔ اسلامی] با عنوان ریاضیدانان، منجمان و دیگر دانشمندان تمدن اسلامی و آثارشان (قرن‌های هفتم تا نوزدهم) (روزنفلد و احسان اوغلو [۲۰۰۳]، و تکملهٔ آن تألیف روزنفلد و احسان اوغلو [۲۰۰۴] و روزنفلد [۲۰۰۶])؛ و ۴- مجموعهٔ برگرن از متون عربی در کتاب ویکتور کَتس با عنوان ریاضیات مصر، بین‌النهرین، چین، هند و اسلام: کتابی مرجع [کَتس، ۲۰۰۷]. و بالأخره، در چنین مروری، اجتناب‌ناپذیر است که برخی از منابع تصادفاً از قلم بیفتد، که بابت آن‌ها نویسنده فقط می‌تواند عذرخواهی کند و تقاضای درک شرایط را داشته باشد. تکمله‌ای بر این مقاله، از طریق آدرس اینترنتی http://pub.quest.ca/~gvb/islamci.html قابل دسترسی است که شامل همهٔ متونی است که بین مرور برگرن در سال ۱۹۹۵ تا پایان سال ۲۰۱۱ چاپ شده‌اند و پس از نگارش مقالهٔ حاضر توجهم به آن‌ها جلب شده است.

در خلال دهه‌های گذشته، ما بیشتر و بیشتر از این واقعیت آگاه شده‌ایم که ریاضیات دورهٔ اسلامی نباید مستقل از موضوعاتی باشد که آن را احاطه کرده‌اند؛ بنابراین مانند امروز، خلاقیت ریاضی تنها هرازگاهی در شاخه‌های علمی جداگانه رخ می‌داد. موضوعاتی مانند جغرافی، نورشناسی، نجوم و حتی احکام نجوم عرصه‌هایی برای بسیاری از ابداعات ریاضی بودند. اما اگر کل این شاخه‌ها را در نظر بگیریم، این مرور به‌اندازهٔ یک تک‌نگاری طولانی خواهد شد. بنابراین خواهیم کوشید خود را به رویدادهایی محدود کنیم که ابداعات ریاضی را به وجود آورده‌اند. در نجوم، ترسیم این خط جداکننده مشکل است؛ امیدواریم خواننده ما را به دلیل انتخاب‌هایمان عفو کند. سرانجام با موضوع انتقال روبرو خواهیم شد، هم انتقال به تمدن اسلامی و هم انتقال درون آن (به‌ویژه بین غرب و شرق). اما به‌طور کلی سؤال‌های مربوط به انتقال از اسلام به اروپا را حذف می‌کنیم. با اینکه این سؤال‌ها هم بسیار جالب و مهم هستند، ترجیح می‌دهیم در اینجا به فرهنگ دورهٔ اسلامی بر اساس شرایط ذاتی آن بپردازیم، تا شرایطی که به‌عنوان یک جامعهٔ دریافت کننده داشته است.

میراث بیگانه: پذیرش، جذب، دگرگونی

شاید تنها نکتهٔ مهم ارتباط بین پژوهشگران تاریخ علوم ریاضی دورهٔ اسلامی در دهه‌های اخیر، تجسم تعاملات این علوم با اسلاف یونانی و هندی آن بوده است. وضعیت نهایی این مباحث، که تقریباً به‌وسیلهٔ هیچ کس مشخص نشده، این است که: الف- دانشمندان دورهٔ اسلامی در واقع آثار نیاکان خود را به ارث بردند و بدون معرفی چیز جدید مهمی آن را گسترش دادند، ب- آن‌ها از چیزی که به ارث برده بودند علم کاملاً جدیدی خلق کردند، که شباهت کمی با علوم قبلی داشت و پارادایم‌هایی ایجاد کرد که غرب از آن‌ها پیروی کرد. هرچند هم یونان و هم هند تأثیر بسزایی بر علوم دورهٔ اسلامی داشتند (برای یکی از نمونه‌های بسیار این تأثیر، دنبال کردن تأثیر هند بر نجوم ریاضی دورهٔ اسلامی از طریق تقریب‌های تکرار شونده، بنگرید به پلوفکر [۲۰۰۲])، پژوهش‌های انجام شده در پانزده سال اخیر، بر پی‌گیری دقیق پذیرش آثار کهن یونانی تأکید داشته است. انتخاب واژگان، این تعاملات را به‌گونه‌ای توضیح می‌دهد که می‌تواند بحث را مهیج جلوه دهد. صبره ([صبره، ۱۹۹۶ آ]، چاپ اول ۱۹۸۷) اظهار می‌کند که نباید از پذیرش «منفعلانهٔ» یونانی صحبت کرد، بلکه باید از «جذب» و «خوگیری» آن در فضای اسلامی که مستلزم بازسازی محتوا و اهداف آن بوده است سخن گفت. در مقاله‌ای که در همان جلد تجدید چاپ شده است، برگرن [۱۹۹۶ ب] نظریهٔ جذب را با شناسایی چهار عامل تأثیرگذار بر جذب دانش بیگانه گسترش داده است: اقتضائات دینی، زبان عربی در جایگاه یک زبان تقریباً جهانی بین قومی، مدارا با گروه‌های

دینی دیگر، و تقسیم یک پادشاهی بزرگ به چند پادشاهی کوچک. کتاب تفکر یونانی، فرهنگ عربی گوتاس [گوتاس، ۱۹۹۷] ظرایف این امتزاج را، با تمرکز ویژه بر نهضت ترجمهٔ آثار یونانی به عربی در اوایل دورهٔ عباسی به‌دقت بررسی کرده است. او بر ارتباط همزیست بین کوشش مترجمان و حرکت‌های اجتماعی (به‌ویژه عناصر ایرانی در دربار نخستین خلفای عباسی) تأکید می‌کند و این مطلب را که فشارهای دینی، مخالف علوم یونانی بودند، انکار می‌کند. در کتاب علوم اسلامی و شکل‌گیری نوزایی اروپایی [صلیبا، ۲۰۰۷]، صلیبا ظهور علوم اسلامی را به‌طور عام، و نهضت ترجمه را به‌طور خاص، به ظهور ساختارهای اجرایی عربی دولت و فرهنگ قرن دوم/هشتم منسوب کرده است. چنانکه دلال اشاره کرده [دلال ۲۰۱۰]، رویکردهای گوتاس و صلیبا به موازات هم کمک می‌کنند تا شکاف موجود در منابع را، با پیشنهاد پاسخ‌های دقیقی به پرسشی که پشت امتزاج به‌ظاهر ناگهانی علوم دورهٔ اسلامی وجود دارد پر کنیم. احمد دلال تأکید می‌کند که جذب علوم بیگانه تقریباً همیشه در فضای انتقاد و خلاقیت صورت می‌گیرد.

مطالعهٔ نُسخ خطی *اصول* اقلیدس: پروژهٔ مطالعهٔ ریاضیات یونانی تقریباً با اصول اقلیدس آغاز شد، بنابراین مطالعهٔ مروریمان بر موضوع انتقال را از اینجا شروع می‌کنیم. ترجمه، کار ظریفی است؛ حتی اختلافات جزئی در معنی اصطلاحات تخصصیِ ترجمه شده می‌تواند معنی متن را به‌طور قابل توجهی در فرهنگ زبان مقصد تغییر دهد. تاریخ ترجمهٔ اصول در دورهٔ اسلامی نسبتاً پیچیده است، هرچند پژوهش‌ها برای نمایش تصویری روشن ادامه دارد. دو سنت مهم مربوط به نسخ خطی بر این موضوع تسلط دارد. اولی، دو ترجمه از حجاج بن یوسف بن مطر در اوایل قرن سوم/نهم است، که یکی از آن‌ها ۲۵ سال پیش از دیگری نوشته شده است. دومی که در زمان خلافت مأمون نوشته شده، احتمالاً شکل اصلاح‌شدهٔ ترجمهٔ اصلی است و ترجمه‌ای کاملاً جدید نیست. چون هر دو متن مفقود شده‌اند، باید آنچه را می‌توانیم، از منابع متکی بر این ترجمه‌ها استنتاج کنیم. شرح نیریزی بر اصول (ترجمه توسط لو بلو [۲۰۰۳ آ]، لو بلو [۲۰۰۳ سی]، و لو بلو [۲۰۰۹]) همراه با متنی اقلیدسی است که احتمالاً دومین ترجمهٔ حجاج را نشان می‌دهد، اما شیوهٔ نگارش علمی منحصر به فرد نیریزی، کار حجاج را تحت الشعاع قرار می‌دهد. دومین سنت، تقریباً پنجاه سال بعد، با ترجمه‌ای جدید از اسحاق بن حنین که ثابت بن قره آن را اصلاح کرده است، آغاز می‌شود. این اثر جدید، نسبت به ترجمهٔ حجاج، به دستور زبان متن اصلی یونانی وفادارتر است، هرچند در این مورد، احتمالاً اسحاق باریک‌بین‌تر از ثابت بوده است. پس از نوشتن این دو اثر اوضاع پیچیده شد، چنانکه تقریباً با پنجاه اصلاح و شرح از دانشمندان دورهٔ اسلامی روبرو هستیم.

بازسازی سنت حجاج بسیار جذاب است، زیرا اثر او نخستین ضبط اساسی از اصول در دورهٔ اسلامی است. معادل‌هایی که حجاج آن‌ها را در ترجمهٔ اصطلاحات فنی (دست کم چنانکه ما

برداشت کرده‌ایم) به کار برده است کمک می‌کند تا ببینیم اقلیدس در آن نخستین روزها چگونه فهمیده می‌شد. مثلاً در متن مشخصی که جبار [۱۹۹۶] آن را از سنت حجاج به‌دست آورده، واژهٔ «تلبین»، یعنی خشت زدن، برای توضیح چهارگوش‌ها به کار رفته است. این واژه انتقالی از مفهوم هندسی یونانی مساحت چهارگوش‌ها به یک مفهوم محاسباتی‌تر برحسب ضرب طول در عرض را نشان می‌دهد. اما نسخه‌ای خطی که اخیراً برنتیس [۲۰۰۶] دربارهٔ آن توضیح داده است، شامل نکاتی دربارهٔ انتقال زبان تخصصی است که مبنایی فلسفی‌تر برای انتخاب واژه‌هایی همچون تلبین پیشنهاد می‌کند. برنتیس این نسخه را به‌عنوان نزدیک‌ترین شاهد در دسترس به دومین ترجمهٔ حجاج مد نظر قرار داده و متذکر شده است که این شاهد نشان می‌دهد که حجاج روی متن یونانی ساده‌تری از آنچه در سنت اسحاق-ثابت بوده کار کرده است. پژوهش دِیونگ [۲۰۰۲آ] دربارهٔ شرح بدون نامی مربوط به سنت حجاج مسائل بیشتری را دربارهٔ تاریخ ترجمهٔ حجاج روشن می‌کند. دیونگ اظهار می‌کند (اما قاطعانه ادعا نمی‌کند) که احتمالاً در ابتدا – یعنی تا قرن هفتم/سیزدهم، زمانی که تحریر نصیرالدین طوسی از اصول (که ترجمهٔ اسحاق-ثابت را مرجّح دانسته است) تا حدودی به سنت حجاج پایان داده است – ترجمهٔ حجاج شناخته شده‌تر از ترجمهٔ اسحاق-ثابت بوده است. در پژوهشی دیگر، دِیونگ [۲۰۰۵] دریافته است که نسخه‌ای خطی از تحریر طوسی که شامل شکل‌هایی در حاشیه است، مستقیماً به حجاج نسبت داده شده است. در نهایت، برنتیس [۱۹۹۶آ] بحث ابن هیثم دربارهٔ اصول را به‌عنوان مثالی می‌آورد تا بینشی دربارهٔ ترجمهٔ دوم حجاج به دست دهد و بدین ترتیب اظهار می‌کند که منبعی که دست اول نباشد نمی‌تواند در باز کردن این گره تاریخی کمک کند.

اثر طوسی، تحریر کتاب اصول اقلیدس، در دورهٔ اسلامی بسیار مورد توجه بوده اما در دورهٔ نوین پوشش داده نشده است. در کار دِیونگ [۲۰۰۸ سی]، جایی که وی درمی‌یابد منبع تحریر، بیشتر «گروه آ» از نسخه‌های خطی اسحاق-ثابت با وام‌گیری چند اصطلاح از ترجمهٔ نخست حجاج بوده است، گامی برای جبران این عدم توجه برداشته شده است. بسیاری از اثبات‌های جایگزین تحریر، از کتاب فی حل شکوک اقلیدس فی الاصول وشرح معانیه ابن هیثم منتج شده است. داستان سیر فارسی تحریر اخیراً موضوع دو پژوهش بوده است. برنتیس [۱۹۹۸آ] چهار ترجمهٔ فارسی از اصول را بررسی کرده و تفاوت‌هایی بین آن‌ها یافته و آن‌ها را با [تحریر] طوسی نیز مقایسه کرده است که در نظریهٔ منحصر به فرد بودن اصل فارسی آن تردید ایجاد می‌کند. خوانندگانی که انتظار می‌رود این متن را بخوانند، با نحوهٔ نوشتن این تحریرها روبرو خواهند شد: مثلاً خلاصهٔ آملی از مقالهٔ اول (قرن هشتم/چهاردهم، ایران) برای طیف وسیع‌تری از مخاطبان در نظر گرفته شده است؛ ابوالخیر (قرن دوازدهم/هجدهم، دهلی) تحریری فنی‌تر برای کار در دربار

مغول نیاز داشته است، و از کار طوسی به‌عنوان نقطهٔ آغاز راهش استفاده کرده است. دِیونگ [۲۰۰۷] پژوهش برنتیس دربارهٔ منابع فارسی را با تمرکز بر ترجمهٔ قطب‌الدین شیرازی از تحریر پی گرفته است. شیرازی به اصطلاحات عربی پایبند می‌ماند، اما احتمالاً با اهداف تعلیمی، چیزهای جدیدی معرفی می‌کند. دِیونگ این نکتهٔ عجیب را متذکر می‌شود که تفسیرهای فارسی اقلیدس به تحریر بیشتر تمایل داشته است تا به ترجمه‌های اصلی اقلیدس؛ شاید آن‌ها جذب بینش‌های ریاضیاتی خلاق تحریر شده‌اند.

داده‌های تاریخی از طریق تمرکز بر تعامل بین ترجمه‌های عربی و لاتینی اصول نیز می‌توانند حاصل شوند. ارتباط بین شرح منسوب به نیریزی (حدود قرن سوم هجری/ ۹۰۰ میلادی) بر اصول، که احتمالاً بر اساس ترجمهٔ حجاج انجام شده است، و متن لاتینی منسوب به نیریزی، که گمان می‌رود ترجمه‌ای است که در قرن دوازدهم میلادی (قرن ششم هجری) توسط گرارد کرمونایی انجام شده، معلوم نیست. بوزار [۱۹۹۶] اظهار می‌کند که: شرح عربی بر اساس متن اصیل حجاج نیست، دو متن عربی و لاتینی از هم مستقل نیستند، و ترجمهٔ لاتینی، هم بر اساس ترجمهٔ حجاج است و هم بر اساس ترجمهٔ اسحاق-ثابت. برنتیس [۲۰۰۱ب] با این اظهارات مخالف است و ادعا می‌کند که بیشتر متن لاتینی بر اساس کار نیریزی نوشته شده است. دیونگ [۲۰۰۴] ترکیبی از دو سنت عربی در اثر گرارد کرمونایی را مشخص می‌کند که تأثیر آن‌ها بر مقاله‌های مختلف اصول متفاوت است؛ در حالی که به نظر می‌رسد ترجمهٔ آدلارد باثی با سنت حجاج سازگارتر است. ضمناً پژوهش برنتیس دربارهٔ مقالهٔ اول ترجمهٔ هرمان کارینتیایی از اصول (که آن نیز در قرن ششم/دوازدهم انجام شده است) تأثیراتی ترکیبی را معلوم می‌کند؛ این اثر عمدتاً بر اساس نسخه‌ای عربی از سنت حجاج است، اما تأثیراتی از سنت اسحاق-ثابت و منابع دیگر نیز در آن دیده می‌شود [برنتیس ۲۰۰۱آ]. نسخهٔ لاتینی دیگری از اصول، مربوط به قرن ششم/دوازدهم، سنت یونانی-لاتینی را با سنت عربی-لاتینی در هم آمیخته است [برنتیس، ۱۹۹۶ب]. ظاهراً برهان‌های مقالهٔ اول، از سنتی منتج شده‌اند که تاکنون بر ما نامعلوم مانده است و احتمالاً شامل متون مفقودی از ماهانی، ابن سمح و جابر بن افلح می‌شود.

متون عربی دورهٔ اسلامی نیز در چندین دههٔ اخیر نه‌تنها با هدف پژوهش خود آن‌ها، بلکه به دلیل کمکی که به ترمیم اصل یونانی کار اقلیدس می‌کنند، بررسی شده‌اند. پژوهشگر بزرگ ادبیات باستانی قرن نوزدهم، یوهان لودوی ایبرگ، معتقد بود که متون یونانی به جا مانده، نسبت به متون عربی نمایندگان بهتری برای اصل اثر اقلیدس هستند؛ اما کلامروث در سال ۱۸۸۱ با او مخالفت کرد. کنور [۱۹۹۶] بحثی را که یک قرن قدمت داشت، با آزمودن دوبارهٔ ترجمه‌های لاتینی گرارد کرمونایی و آدلارد باثی از نسخه‌های عربی اصول در مقایسه با یک نسخهٔ خطیِ یونانی بخشی از

مقاله‌های یازدهم و دوازدهم زنده کرد. کنور بر اساس شواهد نتیجه می‌گیرد که احتمالاً کلامروث در حمایت از ارزشمندی ترجمه‌های عربی محق بوده است. رومُوو، جبار و ویتراک [۲۰۰۱] مقالهٔ دهم را از لحاظ لُغوی بررسی کرده‌اند. هرچند این افراد به پیچیدگی اوضاع توجه کرده‌اند، به‌طور کلی از عقیدهٔ کلامروث پشتیبانی کرده‌اند: دست کم یکی از سنت‌های عربی، نسبت به سنتی یونانی که هایبرگ بر آن تکیه کرده، به اقلیدس نزدیک‌تر است. منابع عربی در بازیابی اطلاعات دربارهٔ شروح یونانی بر اصول نیز کارا هستند. جبار [۲۰۰۳ب] شرحی از دو نسخهٔ خطی عربی را بررسی می‌کند که به‌طور تجربی تفاوت‌هایی را بین آن‌ها مشخص می‌کند که احتمالاً به تفاوت‌های زیربنایی بین شروح پروکلوس و سیمپلیکیوس مربوط می‌شود، هرچند توضیحات دیگری نیز [برای این امر] محتمل است.

افزوده‌ها به *اصول*: اصول چیزی بیش از یک مدرک تاریخی برای شارحان و مترجمان آن، و در واقع یک مدرک زنده بوده است - بنیانی که بر اساس آن، ریاضیات مورد علاقهٔ عملگرایان ساخته و گسترده شد. افزوده‌ها گاه در خود متن نوشته می‌شدند، اما یک سنت رو به پیشرفت نوشتن افزوده‌ها به‌صورت پیوست هم وجود داشت. این دگرگونی‌های اعمال شده بر مقالات اقلیدس، نسبت به قبل بیشتر در دسترس پژوهشگران قرار گرفته است. ترجمهٔ در حال انجام لو بلو از شرح مبسوط نیریزی نمونهٔ برجسته ایست: مجموعه‌ای که هم اکنون شامل مقالهٔ اول می‌شود [لو بلو، ۲۰۰۳آ]، ترجمهٔ گرارد کرمونایی از آن [لو بلو، ۲۰۰۳سی]، و مقاله‌های دوم تا چهارم [لو بلو، ۲۰۰۹]. مورد اخیر، کل شرح سیمپلیکیوس بر اقلیدس را دربر می‌گیرد، و تمامی افتادگی‌های مقالهٔ اول را با استفاده از متن عربی نسخهٔ خطی جدیدی که برنتیس آن را یافته و آرنزِن [۲۰۰۲] تصحیح کرده، پُر کرده است. (مجموعهٔ لو بلو شامل شرح آلبرت کبیر بر مقالهٔ اول [لو بلو، ۲۰۰۳ب] نیز می‌شود.) برخی از شارحان نسبت به برخی دیگر، به اقلیدس وفادارتر بودند. کروزه [۱۹۹۷] اشاره می‌کند که شرح سجزی در قرن چهارم/دهم از دیگران به ساختار اصلی اصول وفادارتر بود؛ او بیشتر مایل بود اثبات‌هایی پی در پی از نظریه‌های موجود را به متن بیفزاید تا اینکه کل نظریه را دوباره در اصول خلق کند. در پژوهشی که دربارهٔ شرح احمد کرابیسی انجام شده است، برنتیس [۲۰۰۰] اظهار می‌کند که کرابیسی برخی شرح‌های یونانی (به‌ویژه شرح‌های سیمپلیکیوس و هرون) را در حدی بیش از یک مطالعهٔ مستقیم از روی متن، در کارش اقتباس کرده است.

مقالهٔ اول: وفاداری به اقلیدس عمومیت نداشت و دور شدن از سنت اقلیدسی در مهم‌ترین فعالیت‌های مسلمانان در ریاضیات رخ داد. بسیاری از این راهبردهای جدید در سطح بنیادین هستند و توجه ما را به‌ویژه به تحریرهای عربی مقالهٔ اول اصول جلب می‌کنند. پژوهش برنتیس

دربارهٔ تنوع این قبیل متون، منابعی یونانی را برای تعدادی از افزوده‌هایی که به مقالهٔ اول نوشته شده‌اند، شامل منابعی فراتر از شروح متعارف یونانی (سیمپلیکیوس، هرون، و پاپوس)، مشخص می‌کند [برنتیس، ۱۹۹۷]. اما نسخه‌های عربی دیگر مقالهٔ اول، نشان‌دهندهٔ تفاوت‌هایی است که به نویسندگان عرب مربوط می‌شود. بوزوبا فِنانه [۲۰۰۳] شرح ابن هیثم بر قضیهٔ هفتم را در حل شکوک کتاب اقلیدس فی الاصول وشرح معانیه بررسی و اظهار می‌کند که این شرح نشان‌دهندهٔ مرحلهٔ جدید و مهمی در تبیین صریح اصل پیوستگی است. تحریر هندسه‌دان قرن چهارم/دهم، ابوسهل کوهی، از مقالهٔ اول (تصحیح و ترجمهٔ برگرن و ون بروملن [۲۰۰۵]) تمامی ساختارهای هندسی آن را حذف می‌کند،و فقط نظریه‌های پشتیبان آن را نگه می‌دارد. کوهی همچنان هیچ یک از موارد عدم تجانس اقلیدس با گزارهٔ توازی را نشان نمی‌دهد، بلکه آن را به موضعی با منطق طبیعیِ بیشتر منتقل می‌کند.

گزارهٔ توازی: شماری از ریاضی‌دانان طی قرن‌ها کوشیدند گزارهٔ توازی را ثابت کنند. دو نمونه از این اثبات‌ها اخیراً چاپ یا بررسی شده‌اند: یکی اثبات نیریزی است که احتمالاً بر اساس متنی تا آن زمان ناشناخته از آگانیس (در متون عربی: اغانیس)، نویسندهٔ یونانی، نوشته شده و هوخندایک [۲۰۰۰ب] آن را تصحیح و به انگلیسی ترجمه کرده است. دیگری، که گرگور [۲۰۰۹] آن را بررسی کرده، با عنوان کتاب الاستکمال در اواخر قرن پنجم/یازدهم توسط مؤتمن بن هود، حاکم حکومت اسلامی سرقسطه (ساراگوسا)، در اندلس(اسپانیا) نوشته شده است (ما بعداً دربارهٔ کتاب الاستکمال بیشتر صحبت خواهیم کرد). دو اثبات ثابت بن قره که قبلاً انجام شده معروف است؛ هر دوی آن‌ها وابسته به جایگزین کردن تعریف اقلیدس از توازی با تعریفی بر اساس تساوی فاصلهٔ یک خط با دیگری است. راشد و هوزل [۲۰۰۵] (چاپ دوباره در راشد [۲۰۰۹ای]) هر دو کار ثابت را تصحیح و به فرانسوی ترجمه کرده‌اند، و تلاش‌های او برای اثبات امکان وجود یک خط راست با فاصله‌ای مساوی از دیگری را توضیح داده‌اند. مشهورترین این‌ها اثبات عمر خیام در رسالهٔ فی شرح ما أشکل من مصادرات اقلیدس است که اخیراً راشد و وهاب‌زاده [۱۹۹۹] آن را تصحیح و ترجمه کرده‌اند، جبار [۲۰۰۲ب] آن را به فرانسوی ترجمه کرده و کنعانی [۲۰۰۰] آن را توضیح داده است. رهیافت خیام گزارهٔ توازی را با دو حکم جایگزین می‌کند: خطوط همگرا یکدیگر را قطع می‌کنند، و دو خطی که همگرا هستند هرگز نمی‌توانند در امتداد همگرایی از هم دور شوند.

نظریهٔ نسبت‌ها و اعداد گنگ:موضوعی چالش برانگیزتر، و نهایتاً پربارتر، واکنش مسلمانان به نظریهٔ اقلیدس دربارهٔ نسبت‌ها بود که توجه پژوهشگران جدید در پانزده سال اخیر را به خود جلب کرده است. وقتی کمیت‌هایی که در تناسب قرار می‌گیرند (که معمولاً مقدار طول پاره‌خط

هستند) گنگ باشند، اقلیدس از ائودوکسوس پیروی می‌کند: اگر $A/B = C/D$ باشد، برای هر عدد صحیح x و y، مقادیر xA و xC، الف- بزرگ‌تر از، ب- برابر با، و یا ج- کوچک‌تر از مقادیر yB و yD هستند. تعریف دردِسر ساز اقلیدس، از همان اوایل مورد آزمایش و پرسش قرار گرفت. پیش از این در اوایل قرن سوم/نهم، عباس بن سعید جوهری، از دوستان مأمون خلیفهٔ عباسی (۱۹۷- ۲۱۸/ ۸۱۳-۸۳۳)، برای اثبات یا توضیح تعریف‌های اقلیدس از تساوی یا بزرگ‌تر بودن این نسبت، تلاشی نسبتاً خام کرده است (دیونگ این اثر را تصحیح و ترجمه کرده [۱۹۹۷] و ترجمهٔ فارسی آن را بررسی کرده است [۲۰۰۸ب]).

کمی بعد، ریاضی‌دانان اسلامی تعریف بر اساس «تفریق دوسویه»[۱] را به‌عنوان رهیافت دیگری پیشنهاد کردند: دو نسبت مفروض در صورتی با هم برابرند که اگر الگوریتم اقلیدسی دربارهٔ آن دو به کار رود، دنبالهٔ یکسانی از اعداد در هر دو بار پدیدار شود (در مود مقادیر گنگ، ممکن است این فرایند تا بی‌نهایت ادامه یابد، اما لزوماً مانع برابری دنباله‌ها نمی‌شود). بسته به این‌که این اعمال چگونه توسط عملگرایان تفسیر شود، مقادیر هندسی می‌توانند تقریباً به‌صورت عددی نشان داده شوند- این یعنی یک حرکت مصمَّم غیر اقلیدسی. رسالة فی المشکل من النسبة از ابوعبدالله محمد بن احمد ماهانی (۸۶۰/۲۴۵) که توسط وهاب‌زاده [۲۰۰۲] تصحیح و به انگلیسی ترجمه شده، نمونه‌ای بسیار قدیم از تعریف بر اساس «تفریق دوسویه» است؛ رسالهٔ ماهانی تعریف جدیدی عرضه می‌کند، اما همچنان می‌کوشد تا برابری‌اش را با تعریف‌های اقلیدسی ثابت کند. وهاب‌زاده حدس می‌زند که احتمالاً تعریف بر اساس «تفریق دوسویه» مرجح بوده است زیرا می‌تواند به‌گونه‌ای پیکربندی شود که به نسبت‌ها اجازه دهد که به‌طور مطلق وجود داشته باشند، نه در تساوی با نسبت‌های دیگر. این ویژگی، مبنای نسبت را به سمت برداشتی عددی از آن منتقل می‌کند. هوخندایک [۲۰۰۲آ] به اثر ماهانی به‌عنوان اثری ممتازتر از تلاش‌های نیریزی و عمر خیام و نظریه‌هایی که ممکن است ریشهٔ یونانی داشته باشد توجه کرده است. سرانجام بِن مایلد [۱۹۹۹] اظهار می‌کند شرح ماهانی که در قرن سوم/نهم بر مقالهٔ دهم نوشته شده است شامل مطالب جبری شدهٔ خیلی قدیم اصول است و تعریف اعداد منفی و گنگ را در بردارد. بِن مایلد [۲۰۰۴] تحلیلش را با مطالعهٔ فعالیت سجزی دربارهٔ ریشهٔ n-اُم در این متن گسترش می‌دهد.

۱. این عبارت، معادل واژهٔ Anthyphairetic، صفت ساخته شده از Anthyphairesis بر اساس واژهٔ یونانی Anthyphairein است. Anthyphairesis به معنی «تفریق دوسویه»، نام یونانی فرایندی است که اقلیدس آن را برای یافتن بزرگ‌ترین مقسومٌ علیه مشترک دو عدد صحیح به کار برده است.-م

برای آگاهی از سیر تاریخی این مفهوم در منابع دورهٔ اسلامی نک:

Jan P. Hogendijk, “Anthyphairetic Ratio Theory in Medieval Islamic Mathematics”.*From China to Paris. 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Volume 46 of Boethius Series, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2002.

ترکیب نسبت‌ها در سنت اقلیدسی مطلب منطقی ظریفی است؛ وی در مقالهٔ پنجم، نسبتی را که از ترکیب a/b و b/c تشکیل شده، برابر با a/c تعریف کرده (ولی اثبات نکرده) است. این مطلب از جهت غافلگیر کننده‌ای مشکل ایجاد کرد: پژوهش ثابت بن قره دربارهٔ شکل قطّاع (یا قضیهٔ منلائوس) به‌عنوان نتیجهٔ بنیادین مثلثات کروی. این قضیه ادعا می‌کند که نسبت معینی از سینوس‌ها با ترکیب دو نسبت سینوسی دیگر برابر است. در رسالهٔ الشکل القطاع، ثابت بن قره تعدادی از قضایای مربوط به تغییر این نسبت‌ها را ثابت می‌کند که امروزه بر هر دانش‌آموز دبیرستانی آشکار است، اما در «قضیهٔ نسبت» اقلیدس نیاز به اثبات دارد. بعد، ثابت در اثر دیگرش کتاب الی المتعلمین فی النسبة المؤلفة (کتاب فی تألیف النسب) از رهیافتی با جنبهٔ حسابی بیشتر استفاده می‌کند. لورچ [۲۰۰۱] تصحیح و ترجمهٔ انگلیسی هر دو اثر ثابت را منتشر کرده است. بلوستا [۲۰۰۴ب] (چاپ دوباره توسط راشد [۲۰۰۹ ای] همراه با ترجمهٔ فرانسوی متن) شرحی بر جنبه‌های هندسی الشکل القطاع نوشته است. کروزه [۲۰۰۴ ب] (چاپ دوباره توسط راشد [۲۰۰۹ ای] همراه با تصحیح و ترجمهٔ فرانسوی) اظهار می‌کند که کتاب فی تألیف النسب بذر انتقال مبحث نسبت‌ها از مفهوم اقلیدسی به سمت مفهوم حسابی آن را پاشید و مفهومی با سنت هندسی معطیات اقلیدس فراهم کرد.

این مسائل در ادامه شدت یافت. رهیافت اقلیدس دربارهٔ نسبت‌ها در مقالهٔ پنجم، که به مقادیر دلخواه مربوط می‌شود، سازگاری کاملی با کارهای بعدی او در مقالهٔ هفتم، که به‌طور ویژه به اعداد مربوط می‌شود، ندارد. در اوایل قرن پنجم/یازدهم، ابن هیثم کوشید بخشی از مقالهٔ پنجم را برای سازگاری با مقالهٔ هفتم بازسازی کند. اما دیونگ [۱۹۹۶] به این نکته اشاره می‌کند که ابن هیثم به‌اندازهٔ ابن سَری (= ابن صلاح همدانی)، که یک قرن بعد کوشید مقالهٔ هفتم را با مقالهٔ پنجم سازگار کند، موفق نبوده است. شناخته‌شده‌ترین اثر دورهٔ اسلامی دربارهٔ نسبت‌ها در شرح ما اشکل من مصادرات اقلیدس از عمر خیام است که راشد و وهاب‌زاده [۱۹۹۹] آن را تصحیح و به فرانسوی ترجمه کرده‌اند. دربارهٔ کار خیام، تمرکز نظریه‌ها بر گسترش اثر وی به‌گونه‌ای است که مفهوم جدید اعداد حقیقی از صفحات آن قابل دریافت است. وهاب‌زاده [۱۹۹۷، ۲۰۰۴] دیدگاه خوش‌بینانه‌تری دارد (و همچنین اظهار می‌کند که خیام تعریف بر اساس «تفریق دوسویه» را ترجیح داده است، زیرا این تعریف اجازه می‌دهد که یک نسبت به خودی خود، و نه لزوماً در مقایسه با نسبت دیگر، تعریف شود)، در حالی که ویتراک [۲۰۰۰] مخالفت بیشتری کرده است. بِن مایلد [۲۰۰۸] این موضوع را به اثر خیام دربارهٔ معادله‌های درجهٔ سه مربوط می‌سازد، اثری که خیام در آن این معادله‌ها را با تبدیل به مسائل هندسی، و انتخاب واحدهای اندازه‌گیری برای طول، سطح و حجم حل کرده است. بِن مایلد همچنین اظهار می‌کند که مفاهیم نسبت و عدد در آثار جبردانان مکتب کرجی نیز دیده می‌شود.

بازسازی حسابی اصول از نظریهٔ نسبت هم فراتر رفت. پـژوهش احمـد جبـار دربـارهٔ بـاب اول کتاب الاستکمال حاکم اسـپانیایی قـرن پنجم/یـازدهم، مـؤتمن بـن هـود، حسـابی‌سـازی گسـتردهٔ بخش‌های مختلف اصول، شامل اصول موضوعه، و مقاله‌های دوم، هفتم، و نهم، را نشان مـی‌دهـد (چنانکه تأثیراتی از حساب نیکوماخوس نیـز بـه آن منتقـل شـده اسـت) [جبـار، ۱۹۹۹]. دیونـگ [۲۰۰۱] اثری معروف و تأثیرگذار مربوط به اواخر قرن هفتم/سیزدهم، بـا نـام اشـکال التأسیس از شمس‌الدین سمرقندی را ترجمه کرده است که وی در آن، مطالبی را اغلب از مقالـهٔ اول بـه شـکلی موافق با جبر و اندازه‌گیری دگرگون کرده است (همچنین بنگریـد بـه کـار دیونـگ بـر شـرح مفصـل قاضی‌زادهٔ رومی در اوایل قرن نهم/پانزدهم بر رسالهٔ سـمرقندی، کـه بـه‌طور ویـژه بـه پرسـش‌هـایی دربارهٔ نقش یک شارح می‌پردازد [دیونگ، ۲۰۰۲سی].)

تا زمانی که موضوع‌های یادشده،با تسلط خود، پژوهش‌های جدید را به سمت بررسـی دگرگـون شدن سنت اقلیدسی در دورهٔ اسلامی بردند، علاقه و واکنش بـه اصـول (اگـر نـه همـه) بسـیاری از مقاله‌های آن را تحت تأثیر قرار داد. ماتوِیفسکایا [۱۹۹۶] شرحی از ابونصر منصور بن عراق (اسـتاد بیرونی) بر مقالهٔ سیزدهم را با تمرکز بر ساختار هفت‌ضلعی در دسـترس قـرار داده اسـت. در ادامـهٔ پژوهش‌های قبلی دربارهٔ اصول، دیونگ [۲۰۰۸آ] پیوستی بدون نام نویسنده بـر تحریـر نصـیرالدین طوسی از اصول با عنوان مقالهٔ شانزدهم، بر اساس اثر یونانی متأخر با نام مقالـهٔ پـانزدهم، را نشـان می‌دهد که دربارهٔ ساختار چند وجهی‌های محاط در کره‌ها و محاط در دیگـر چنـد وجهـی‌هاسـت. دیونگ اشاره می‌کند که این مطلب به سنت ارشمیدسی نزدیک‌تر است تا به سنت اقلیدسی.

***المناظر* اقلیدس:** اقلیـدس عـلاوه بـر اصـول، آثـار دیگـری نیـز نوشـته اسـت؛ بـین آثـار دیگـر او، المنـاظر یکـی از برجسـته‌تـرین آثـار دورهٔ اسـلامی اسـت. ترجمـهٔ انگلیسـی خیرانـدیش از نسـخهٔ عربـی ایـن اثـر، بـا پـژوهش او دربـارهٔ تغییـرات قـائم بـه ذاتـی کـه بـه دلیل دگرگونی‌های زبـانی از مـتن اصـلی (بـه‌ویژه در مـورد تعریـف‌هـا) اتفـاق افتـاده، همـراه شده اسـت [خیرانـدیش، ۱۹۹۹، ۱۹۹۶]. راشـد نیـز مـتن دیـوکلس دربـارهٔ آینـه‌هـای سـوزان را، که فقط مـتن عربـی آن برجـا مانـده، تصـحیح دوبـاره و بـه انگلیسـی ترجمـه کـرده اسـت (ترجمـهٔ انگلیسـی راشـد [۱۹۹۷ سـی]، ترجمـهٔ فرانسـوی راشـد [۲۰۰۰آ]؛ ایـن اثـر قـبلاً توسـط تـومِر در ۱۹۷۶ تصـحیح شـده اسـت). تصـحیح و ترجمـهٔ فرانسـوی راشـد از شـرح کِنْدی در نیمهٔ قرن سوم/نهم بـر المنـاظر،نقطـهٔ آغـازی کـه بـه گـذار از المنـاظر اقلیـدس بـه کتـاب معـروف المنـاظر ابـن هیـثم کمـک کـرد، یکـی از رسـاله‌هـای کتـابی اسـت کـه بـه کارهـای کِنـدی دربـارهٔ نورشناسـی و آینـه‌هـا اختصـاص دارد [راشـد، ۱۹۹۷ د]. راشـد [۱۹۹۷ ب] دربـارهٔ اهمیـت ایـن نسـخهٔ خطـی در فهـم مـا از نورشناسـی هـم در دورهٔ

اسلامی و هم در اواخر دورهٔ باستان بحث می‌کند. ما در ادامهٔ این پژوهش، با تفصیل بیشتری به نورشناسی خواهیم پرداخت.

مؤلفان یونانی دیگر: هرچند جذب و تغییر شکل آثار اقلیدس موضوع اصلی پژوهش‌های اخیر بوده، آثاری که از دیگر مؤلفان یونانی به دست ما رسیده نیز مغفول نمانده است. منلائوس اسکندرانی (حدود ۱۰۰ میلادی) تأثیر مهمی بر علوم دورهٔ اسلامی داشته است، اما عکس همین مطلب را نیز می‌توان گفت. نسخه‌های عربی اُکَر منلائوس متن آن را دچار تغییری اساسی کرده‌اند که این تغییر با جایگزین کردن تابع سینوس به جای وتر آغاز شده است. تاریخ نسخه‌های عربی این اثر مهم هندسی و مثلثاتی توسط سیدولی [۲۰۰۶] بررسی شده است. شارحانی چون ابونصر منصور و نصیرالدین طوسی نیازی ندیدند که به مرزی که یونانیان بین هندسهٔ کروی و کاربردهای نجومی آن قائل بودند احترام بگذارند؛ تفسیرهای آنان توسط نادال، طه و پینل [۲۰۰۴] بررسی شده است (پژوهش مفصل‌تری از شرح طوسی بر اثر منلائوس توسط پینل و طه [۲۰۰۳] انجام شده است).

هرچند دگرگونی‌های [ترجمه‌های] عربی آثار یونانی اساسی است، هنوز می‌توان تا حدی نشان آثار یونانی را در آن‌ها باز یافت. بخشی از اثر مفقود منلائوس، با عنوان اصول هندسی، در بازسازی هوخندایک از باقی‌مانده‌هایش در دو اثر از سجزی (همکار مسن‌تر بیرونی) متجلی شده است [هوخندایک، ۱۹۹۹]. هوخندایک نتیجه می‌گیرد، بر خلاف آنچه قبلاً می‌دانستیم، تثلیث زاویه توسط مقاطع مخروطی در این اثر وجود ندارد. سیدولی و برگرن [۲۰۰۷] تصحیح و ترجمهٔ انگلیسی ترجمهٔ عربی تسطیح بسیط الکرة بطلمیوس را فراهم کرده‌اند. در این اثر بطلمیوس فرض کرده است خوانندگان می‌دانند که تصویر گنج‌نگاشتی، دایره‌ها را حفظ می‌کند، اما مسلماً اثبات‌های کلی حفظ زوایا را نمی‌دانند. برنتیس [۱۹۹۸ ب] انتقال عربی مقدمه بر حساب نیکوماخوس را با توجه ویژه به توضیحات کِنْدی در آن، دربارهٔ اینکه آیا می‌توان «یک» را در معنای بطلمیوسی به‌عنوان عدد دانست، مطالعه کرده و نتیجه گرفته است که نمی‌توان چنین پنداشت (دربارهٔ متن عربی اثر نیکوماخوس، همچنین بنگرید به فرویدنتال و لِوی [۲۰۰۴])

هرچند درجات مختلفی از اعتقاد به بدون نقص بودن متون اصیل یونانی وجود داشت، بسیاری از مؤلفان مسلمان با موضوعات این آثار بیشتر به‌عنوان منابع ریاضیِ زنده کار می‌کردند تا یک فرهنگ کهن. بنابراین مثلاً برگرن و سیدولی [۲۰۰۷] نشان می‌دهند که تحریر ثابت بن قره از فی جرمی النیرین آریستارخوس شامل افزوده‌هایی از ثابت بن قره دربارهٔ معنی نجومی یک عبارت خاص، و بازبینی ساختار برخی اثبات‌هاست. برگرن و سیدولی همچنین نشان می‌دهند که تحریر نصیرالدین طوسی از رسالهٔ آریستارخوس به متن ثابت بن قره نزدیک‌تر است تا متن ثابت بن قره به متن آریستارخوس. با توجه به اُکَر تئودوسیوس، سیدولی و کوسوبا [۲۰۰۸] یادآور می‌شوند که

طوسی همان نوع آزادی‌های ریاضی را به کار می‌برد که ثابت پیش از وی به کار برده بود (تصحیح کامل متن عربی و لاتینی اثر تئودوسیوس اخیراً توسط کونیچ و لورچ [۲۰۱۰] منتشر شده است). با این حال، در اغلب موارد، برای ما متن عربی، شاهد بهتری برای دستیابی به متن اصلی یونانی است. طه [۱۹۹۸] تصحیح و ترجمهٔ فرانسوی تحریر ثابت بن قره از بخشی از کتاب مأخوذات ارشمیدس را فراهم کرده و اظهار می‌کند که ترجمهٔ ثابت از ترجمه‌های متعدد جدیدتر، به فضای کار ارشمیدس نزدیک‌تر است. گاهی متن عربی تنها منبع ماست، مانند تصحیح تسطیح بسیط الکرة که چنانکه گفته شد توسط سیدولی و برگرن منتشر شده است.

اصلاح متون کهن، تنها آغاز کار بود؛ شماری از پژوهش‌های اخیر زمینهٔ وسیعی را نشان داده‌اند که مؤلفان مسلمان در آن، آثار کهن را توسعه داده و یا حتی «کامل» کرده‌اند. برخی از این توسعه‌ها در مقیاس کوچک رخ داده است، مانند تکمیل افتادگی‌های مخروطات آپولونیوس توسط کوهی [برگرن و ون بروملن، ۲۰۰۲]، حل مسئله‌ای که ارشمیدس آن را در الکرة و الاسطوانة مطرح کرده است توسط کوهی [برگرن، ۱۹۹۶آ]، یا گسترش روش‌های ابراهیم بن سنان فراتر از هندسهٔ آپولونیوس در اثرش با نام المسائل المختارة [بلوستا، ۱۹۹۷]. پژوهشگران به شیوه‌های مختلفی دربارهٔ تازگی و اهمیت این توسعه‌ها داوری کرده‌اند. راشد اظهار کرده است که بخشی از کار بنوموسی، سه برادری که در نیمهٔ قرن سوم/نهم به ریاضیات می‌پرداختند، می‌تواند به‌عنوان به‌کارگیری مرحلهٔ دگرگونی هندسه مطالعه شود، که هندسه از طریق آن از روش‌های ارشمیدسی فراتر رفت [راشد، ۱۹۹۶آ؛ ۱۹۹۷آ].

مصادیق توسعهٔ متون کهن می‌توانست در مقیاسی وسیع رخ دهد. شاید تأثیرگذارترین نمونه، مقالة فی تمام کتاب المخروطات ابن هیثم دربارهٔ اثر آپولونیوس است. این اثر ابن هیثم که قبلاً توسط هوخندایک در سال ۱۹۸۵ تصحیح و به انگلیسی ترجمه شده بود، توسط راشد [۲۰۰۰ای] تصحیح و به فرانسوی ترجمه شده است. (هوخندایک [۲۰۰۲ب] به کار راشد پاسخ داده و در مقاله‌اش [هوخندایک، ۲۰۰۳آ] از انجام دوبارهٔ چنین کارهایی اظهار تأسف کرده و پیشنهاد کرده که بهتر است تلاش‌های ما به‌گونه‌ای با هم ارتباط داشته باشد که یافته‌هایمان را در اختیار مخاطبان بیشتری بگذارد). مخروطات به خودی خود یکی از چالش‌برانگیزترین متون یونانی است، و موضوعی جذاب از بین نخستین موضوعات مورد علاقهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی بوده است. در سال‌های اخیر، راشد پروژهٔ عظیمی را برای تصحیح و ترجمهٔ فرانسوی تمامی هفت مقالهٔ مخروطات که متن عربی آن‌ها موجود است سرپرستی کرده است [راشد ۲۰۰۸آ؛ راشد ۲۰۱۰آ؛ راشد ۲۰۰۹ب؛ راشد ۲۰۰۸ب؛ و راشد ۲۰۰۹سی]. این پروژه شامل تصحیح‌ها و ترجمه‌های فرانسوی دکورپس- فولکیه و فدرشپیل از متن یونانی نیز می‌شود (مقاله‌های اول تا چهارم)

[دکورپس- فولکیه و فدرشپیل، ۲۰۰۸؛ دکورپس- فولکیه و فدرشپیل ۲۰۱۰]. نسخه‌های عربی که در قرن سوم/نهم به سرپرستی بنوموسی تهیه شده است جزئیات بسیار، پیچیدگی و سلطهٔ محتوای متن را توسط دانشمندانی که در پروژه شرکت داشته‌اند نشان می‌دهند. اثر دیگر آپولونیوس که به عربی موجود است، فی قطع الخطوط علی النسبة،توسط راشد و بلوستا [۲۰۱۰] تصحیح و به فرانسوی ترجمه شده است.

تأثیرات منطقه‌ای

مکان در برابر هویت:علم دورهٔ اسلامی اغلب به‌طور تلویحی به‌عنوان یک موجودیت مستقل در نظر گرفته شده است؛ با این حال دست کم هفت قرن، یک منطقهٔ جغرافیایی گسترده، تفسیرهای مختلفی از اسلام و در واقع مجموعه‌ای از ادیان مختلف را پوشش داده است. مقالهٔ تأثیرگذار عبدالحمید صبره با عنوان «جایگیری علوم دورهٔ اسلامی- مکان در برابر هویت» [صبره، ۱۹۹۶ب] از حساسیت فرهنگ‌ها و شرایط محلی به شکل بهتری دفاع می‌کند و بر مکان‌های مختلفی که فعالیت‌های علمی در آن‌ها انجام می‌شد (دربار، مدرسه، مسجد) تأکید می‌کند. اصرار او بر توجه به ترکیبی از زمینه‌های فرهنگی، مذهبی، و دیگر مواردی که به تجربیات و نوشته‌های دانشمندان قدیم شکل داده و درسی برای تمامی مورخان علم است، فقط توسط مورخان ریاضیات باستان و سده‌های میانه به‌تدریج عملی می‌شود.

برای این تغییر مسیر، که در گسترهٔ نظام علمی تاریخ ریاضیات در حال رخ دادن است، به‌طور ویژه در مورد علوم دقیق دورهٔ اسلامی، برنتیس پیشگام شد. مرور او بر علوم ریاضی ایران دورهٔ صفوی (تقریباً از ۹۰۷ تا ۱۱۳۵ قمری)، از جایگزین شدن رویکرد «افقی» به جای رویکرد «عمودی» حمایت می‌کند [برنتیس، ۲۰۱۰]. رویکرد عمودی، بر آثار و پژوهش‌های مهم تأکید می‌کند تا روایتی از پیشرفت فکری به دست دهد؛ اما رویکرد افقی، به ساختارهای اجتماعی، بررسی‌های تاریخ محلی و مقایسهٔ آن‌ها با فرهنگ‌های همسایه و پیشین - با عطف توجه به ریاضیات در سطوح اجتماعی دیگری به جز سطح نخبگان- می‌پردازد. برخی از آثار جدید برنتیس، نقش حمایت از علوم دقیق در پس‌زمینه‌های مختلف در دورهٔ اسلامی را می‌کاود. برنتیس [۲۰۰۹] این حمایت را از قرن هشتم هجری به بعد به‌ویژه در دربارها، و از قرن دوازدهم به بعد در مؤسسات آموزشی موقوفه بررسی کرده است. برنتیس [۲۰۰۸آ] اظهار می‌کند که این حمایت‌ها بعد از سدهٔ هفتم/ سیزدهم از بین نرفته است، هرچند به چند طریق تغییر کرده است؛ بنابراین کاهش حمایت‌ها نمی‌تواند به‌عنوان توضیحی برای آنچه افول علوم قدیم در فرهنگ‌های اسلامی نامیده می‌شود به کار رود. برنتیس [۲۰۰۸ب] به سیر اصول اقلیدس در ایران، از طریق دربارها،

مدرسه‌ها و مجموعه‌داران پرداخته است. بـرنتیس در یکـی از آثـارش [۲۰۰۷] از رسـاله‌ای دربـارۀ تاریخ آموزش، تألیف نُعَیمی، دانشمند دمشقی قرن نهم/پانزدهم، استفاده می‌کند تا با بحث دربـارۀ اینکه درک جدید مخالفت فقها با علوم قدیم باید دوبـاره ارزیـابی شـود، نقـش آن‌هـا را در دو قـرن گذشته بررسی کند. او همچنین اثر متقابل حمایت از علم و هنر در قـرن یازدهم/هفـدهم در دربـار صفوی را نیز بررسی کرده است [برنتیس، ادامه]. دلال [۲۰۱۰] یادآور می‌شود کـه اکنـون تقریبـاً از طریق اثر برنتیس، می‌توان دربارۀ اینکه علوم عقلی نقشی اساسی در دربارهـا و مؤسسـات آموزشـی ایفا می‌کردند کمی تردید کرد.

چنانکه سامسو [۲۰۰۲] در ارزیابی‌اش از شواهدی که دربارۀ اندلس وجود دارد اشاره می‌کنـد، به دلیل کمبود داده‌ها، نوشتن یک تاریخ اجتماعی ریاضیات مناسب، سخت‌تر از نوشتن یک تـاریخ معمول است. گاهی منابع منحصر به فردی از شواهد، مثل کشف دومین نامۀ جمشـید کاشـانی بـه پدرش [باقری، ۱۹۹۷ ب] که زندگی اجتماعی و علمی او در دربار الغ‌بیگ را شرح مـی‌دهـد، مـا را غافلگیر می‌کند. هرچند این منابع ممکن اسـت کـم باشـد، مورخـان علـم موظفنـد پرسـش‌هـایی عمیق‌تر را که با این رویکرد جدید مطرح می‌شوند بازبینی کنند: اهداف غایی مطالعات ما چیست؟ در سایۀ پاسخ به این پرسش، چه راه‌هایی برای رویکرد به موضوعاتمان برگزینیم تا به این اهداف برسیم؟

بررسی‌های منطقه‌ای: در هیچ موردی از علوم دورۀ اسلامی، موضوع مکان، حادتر از ریاضیات و نجوم در اسپانیا و شمال آفریقا نیست. چنانکه سامسو در پژوهش خود دربارۀ کار بیرونی در غرب جهان اسلام اظهار می‌کند [سامسو، ۱۹۹۶]، تفـاوت‌هـای سیاسـی و فرهنگـی بـین شـرق و غـرب موانعی به وجود آورد که انتقال آثار علمی بعد از قرن چهارم/دهم را سست کرد (بـرای دسترسـی بـه پژوهشی کلی‌تر دربارۀ انتقال افکار بین فرهنگ‌های اسلامی، بنگرید به [جبـار، ۲۰۰۲آ]). بنـابراین بررسی‌های جبار دربارۀ فعالیت‌های ریاضی انجام شده در این نواحی، محیط اجتماعی منحصر بـه فردی را آشکار می‌کند. اثر جبار [۲۰۰۳آ] مروری بر پژوهش دربارۀ ریاضیات در انـدلس و مغـرب از قرن سوم/نهم تا دهم/شانزدهم است که پرسش‌های متعددی مطرح می‌کند تـا پژوهشـگران آینـده به آن‌ها پاسخ دهند. مغرب، نقطۀ مورد تمرکز جبار [۱۹۹۸] است، که به تأثیر اولیۀ انـدلس و نقـش افزایندۀ مدرسه‌های مساجد از قرن هشتم/چهاردهم به بعد اشـاره مـی‌کنـد. [در ایـن خصـوص] دو مکتب فکری پدیدار شد، که بـا دو شـیوۀ برخـورد مختلـف در برابـر اهمیـت اثبـات در ریاضـیات شخصیت یافتند. پژوهشی که نقش اثبات در علوم دقیق مختلف را در سـرزمین‌هـای شـرقی تمـدن اسلام بررسی کرده در مقالۀ خیراندیش [۲۰۰۸] آمده است. جبار [۲۰۰۰آ] که به دورۀ عثمـانی در مغرب (قرن‌های دهم/شانزدهم تا سیزدهم/نوزدهم) پرداخته است، در این باره بحث کرده کـه تغییـر در فرهنگ سیاسی، علم را به آن اندازه‌ای که ممکن است انتظار برود تحت تأثیر قرار نمی‌دهد.

در سال‌های اخیر پژوهش‌های بسیاری دربارهٔ موضوعات ویـژه‌ای در علـوم ریاضـی در منـاطق معین، به‌ویژه اندلس، انجام شده است (بسیاری از این پژوهش‌ها در دانشگاه بارسـلون انجـام شـده است).چون منابع هنوز مایلند موضوعات ذیل را بیشتر بر اساس ارتباط عقلی‌شان طبقه‌بندی کنند تا بر اساس منشأ منطقه‌ای آن‌ها، این مطالب چنانکه به‌صورت موضوعی در ادامهٔ مقالهٔ مروری حاضر آمده‌اند، مورد بحث قرار می‌گیرند.

هندسه

یکی از گسترده‌ترین بخش‌های ریاضیات دورهٔ اسلامی، هندسه است کـه در آغـاز از سـنت یونـانی الهام گرفته بود. اما، چنانکه برگرن [۲۰۰۲ب] اشاره می‌کند، پذیرش هندسه به‌عنوان علمی بیگانـه، گاه با موانع مذهبی روبرو می‌شد. همچنین، دغدغه‌های مذهبی، مانند تعیین جهـت قبلـه و اوقـات نمازها، علاقه به هندسه را بر می‌انگیخت. در اغلب موارد، ثابت شده که جاذبهٔ فکری به‌اندازهٔ کافی محرّک بوده است. هوخندایک [۱۹۹۶ب] ادعـا مـی‌کنـد کـه سـنت یونـانی، بـه‌ویژه در مثلثـات و پیوستگی نزدیک‌تر بحث نسبت به مفهوم عدد، از راه‌هـای مختلفـی جـذب شـده و گسـترش یافتـه است. اما هیچ تحولی در هندسه، در سطح «پارادایم»، در مقیاس ظهور هندسـهٔ تحلیلـی در اوایـل دورهٔ مدرن اروپا، رخ نداد. این بحث در جامعهٔ علمی، حل‌نشده باقی ماند؛ پژوهش‌های این بخش از کار مروری ما، داده‌هایی غنی در مورد این موضوع فراهم می‌کنند.

ابتکارات؛ تحلیل و ترکیب: پیش از سده‌های میانه، آثار مربوط به رهیافت‌های ابتکـاری بـرای حل مسائل هندسی تقریباً بی‌سابقه بود (به جـز کتـاب مفقـود ارشـمیدس، بـا نـام روش). در قـرن چهارم/دهم، سجزی معادلی از دورهٔ اسلامی برای کتـاب چگونـه ایـن را حـل کنـیم از جـرج پولیـا نوشت، که شامل هفت رهیافت جدید حل مسائل هندسی می‌شود؛ ترجمهٔ فارسـی ایـن اثـر توسـط باقری و ترجمهٔ انگلیسی آن توسط هوخندایک [باقری و هوخندایک، ۱۹۹۶]، و تصـحیح و ترجمـهٔ فرانسوی آن توسط راشد [۲۰۰۲ب] انجام شده است. یکی از روش‌هایی که سجزی مطـرح کـرده، تحلیل و ترکیب است، روش یونانی کهنی که در دورهٔ اسلامی تغییر یافت و تقویت شد. برگرن و ون بروملن[۲۰۰۱د] راه‌های تغییر این فرایند را کاویده‌اند: به‌طور ویژه تحلیل، به‌پیش رفته و تـا حـدی، تأکیدش را از قابلیتِ ساختن اثبات به سمت تعیین وجود منحصر به‌فردی از موضوع مطلوب انتقال داده است. در اغلب موارد، استدلال نه‌تنها کل ترکیـب، بلکـه بخـش نخسـت یـک تحلیـل یونـانی («تحول») را نیز از قلم انداخته است، و فقـط بخـش دوم تحلیـل («تجزیـه») حفـظ شـده اسـت. نمونه‌ای از کار «تحلیل توسط معلوم‌ها» (که در آن، چنانکه در معطیات اقلیـدس آمـده، بخشـی از یک شکل هندسی «معلـوم» اسـت، اگـر فـرض کنـیم بخش‌هـای دیگـر «معلـوم» هسـتند) کتـاب

المفروضات ثابت بن قره است که دو پژوهشگر روی آن کار کرده‌اند. دولد سمپلونیوس [۱۹۹۶آ] محتوای این اثر را خلاصه کرده و به تفاوت‌های زیاد اصل اثر ثابت با تحریر معروف طوسی که پس از آن انجام شده، اشاره کرده است؛ دولد سمپلونیوس [۱۹۹۶سی] دربارهٔ مسئلهٔ دو برج، که در صفحات این اثر و دیگر آثار تاریخی آمده است بحث می‌کند. بلوستا [۲۰۰۲آ] برخی از قضایای این اثر را بررسی می‌کند و کاربردی ثابت از واژهٔ «معلوم» در این کتاب را مد نظر قرار می‌دهد. راشد [۲۰۰۲ب] دو اثر حجیم ابن هیثم دربارهٔ این موضوع را تصحیح و به فرانسوی ترجمه کرده است؛ اولی، به خود تحلیل می‌پردازد، و دومی به معنای واژهٔ «معلوم». موالدی [۲۰۰۰] اثر کمال‌الدین (سدهٔ ۷ه‍/۱۳م) فارسی با عنوان اساس القواعد فی اصول الفوائد، و به‌ویژه کاربرد آن از تحلیل و ترکیب در حل یک معادلهٔ جبری را توضیح داده است. «تحلیل توسط معلوم‌ها» در بسیاری از آثار هندسی دورهٔ اسلامی رایج بوده است؛ این مطلب همچنین در تعدادی از پژوهش‌هایی که در جایجای این بخش از مقالهٔ حاضر شرح داده شده، آمده است.

مقاطع مخروطی: یکی از دلایل علاقهٔ هندسه‌دانان مسلمان به مقاطع مخروطی توانایی مقاطع مخروطی در حل مسائلی بود که از راه‌های دیگر حل نمی‌شدند. هوخندایک [۱۹۹۸] اشاره می‌کند که مقاطع مخروطی به دلایل مختلفی، از جمله کاربردهای عملی و کاربردهایی در علوم دیگر همچون نجوم و نورشناسی، جذابیت داشت، اما نخستین محرّک، احتمالاً جذابیت فکری آن بوده است. درک این موضوع، فراتر از فرهنگ‌های معاصر، حتی اروپای قدیم بود. مقاطع مخروطی برای حل تعدادی از مسائل، از جمله ترسیم هفت‌ضلعی منتظم و تثلیث زاویه به کار رفت. پژوهش‌های اخیر بر متون قرن چهارم/دهم و اوایل قرن پنجم/یازدهم متمرکز شده است. لوتر [۲۰۰۲] حل مسئلهٔ دوایر متماسهٔ آپولونیوس توسط ابراهیم بن سنان با به کارگیری روش‌های مخروطات آپولونیوس (که دوباره بیشتر آن تحلیل بدون تجزیه است) را بررسی کرده، یائویچه [۱۹۹۸] رهیافت ابن سنان را با رهیافت‌های ابن هیثم و فرانسوا ویِت مقایسه کرده است. همچنین ابوسهل کوهی در رساله‌ای که توسط آبگرال [۱۹۹۷] توضیح داده شده و توسط همو [۲۰۰۴ب] تصحیح شده، با دوایر متماسه کار کرده است. این رساله، خلاصه‌ای از ابداع وسیله‌ای به نام «پرگار تام» توسط کوهی را که قادر به رسم مقاطع مخروطی است، به دست می‌دهد. این ابزار جدید، توجه سجزی را نیز به خود جلب کرد، چنانکه وی در رساله‌ای چگونگی استفاده از پرگار تام را برای رسم یک مقطع مخروطی شبیه به مقطع مخروطی مفروض دیگر، توضیح داده است (راشد [۲۰۰۳آ] این رساله را تصحیح و به فرانسوی ترجمه کرده است؛ همچنین بنگرید به راشد [۲۰۰۴]، نخستین جلد از مجموعهٔ مجلدات معهود دربارهٔ آثار سجزی که همراه با کروزه نوشته شده است). ابوالجود محمد بن لیث، پیش از اثر معروف خیام که یک قرن بعد نوشته شد، مقاطع مخروطی را در قرن

چهارم/دهم برای حل معادلات درجهٔ سوم و چهارم بـه کـار بـرد (راشـد [۲۰۱۰سـی] رسـالهٔ وی را تصحیح و به فرانسوی ترجمه کرده است). پیش‌تر دربارهٔ انتشار تصحیح و ترجمـهٔ فرانسـوی جدیـد راشد [۲۰۰۰ای] از مقالة فی تمام کتاب المخروطات ابن هیثم توضیح دادیم؛ ایـن جلـد همچنـین تعدادی از آثار دیگر ابن هیثم شامل شرح به‌کارگیری مقاطع مخروطی در ترسیم هفت ضلعی منتظم و رسالة فی شکل بنی موسی، مربوط به مقالهٔ ششم مخروطات آپولونیوس، را نیز دربرمی‌گیرد.

ابوسهل کوهی: دو شخصیت ریاضیدان در سال‌های اخیر مورد توجه و علاقه قرار گرفته‌اند، که این توجهات به پیش از آغاز نوشتن مقالهٔ حاضر برمی‌گردد: ابوسهل کوهی و مؤتمن بن هود. اولی، که بیشتر در بغداد و تحت حکومت آل‌بویه فعالیت می‌کرد، مبتکری بزرگ و تقدیر کننده‌ای برجسـته از میراث یونانی بود. برگرن [۲۰۰۳] در بررسی اثر کوهی اشاره می‌کند که او «استاد زمانهٔ خـود در هنر هندسه» و «آخرین ریاضی‌دانی است که با چشمان هندسـه‌دانـان بـزرگ یونـانی بـه ریاضـیات می‌نگرد». ما پیش از این، توجه کوهی به میراث یونانی را در چندین اثرش دیدیم: حل مسئله‌ای کـه در الکرة والاسطوانة تألیف ارشمیدس، رها شده بود (برگرن [۱۹۹۶آ] آن را تصـحیح و بـه انگلیسـی ترجمه کرده و آبگرال [۲۰۰۴آ] دربارهٔ آن بحث کرده است)، و افزودن قضایایی به مقالهٔ دوم اصـول، که می‌دانیم با این کار قصد داشته است شکاف‌های منطقی مخروطات آپولونیوس را پر کند [برگـرن و ون بروملن ۲۰۰۲]. دفاع جانانهٔ او از قضیهٔ منلائوس در مثلثات کروی در رویارویی با انقلابی که این گزینه را در برابر گزینه‌های ساده‌تر حذف مـی‌کـرد، مثـال تکـان دهنـده‌ای از تقـدیر او از مـردم باستان است [برگرن و ون بروملن ۲۰۰۱آ]. اما تجدید نظر او بـر مقالـهٔ اول اصـول، توانـایی وی در انتقاد و حتی اصلاح اساسی آثار کهن یونانی را نشان می‌دهد: او همهٔ ترسیم‌های هندسـی اصـول را رها می‌کند و با انتقال گزارهٔ توازی به بخش‌های پیشین کتاب، موضوع اصلی را دوبـاره سـازماندهی می‌کند [برگرن و ون بروملن، ۲۰۰۵].

کوهی به‌عنوان یک هندسه‌دان عملگرا، با بهره‌گیری از مقاطع مخروطی در رسـاله‌هـایش دربـارهٔ پرگار تام و دوایر متماسه (که آبگرال [۱۹۹۷] و راشد [۲۰۰۳آ] به آن پرداخته‌اند) و حجم بخشـی از سهمی دوار (که راشد [۱۹۹۶ب] آن را تصحیح و ترجمه کـرده و آبگـرال [۲۰۰۴آ] بـه آن پرداختـه است) به مسائل متنوع بسیاری حمله کرده است. در حال حاضر، بسیاری از آثار هندسـی اقلیدسـی دیگر او بررسی شده‌اند که شامل این موارد هستند: الـف- اخـراج الخطـین مـن نقطـة علی زاویـة معلومة بطریق التحلیل، که صورت اسلامی «تحلیل» را که پیش از این دربارهٔ آن بحث شد، به کـار گرفته است (برگرن و ون بروملن [۲۰۰۱سی] و آبگرال [۲۰۰۲] آن را تصحیح و ترجمه کـرده‌انـد)؛ ب- رسالة فی نسبة ما یقع بین ثلثة خطوط من خط واحد، که هـم تحلیـل و هـم ترکیـب را بـه کـار می‌گیرد (برگرن و ون بروملن [۲۰۰۰] آن را تصحیح و ترجمه کرده‌اند)؛ ج- اثر بسـیار کوتـاه بـدون

عنوانی شامل تنها دو قضیهٔ مجزا، که یکی از آن‌ها می‌تواند به‌عنوان قضیه‌ای مربوط به تبدیل تجانسی دایره‌ها تفسیر شود (تصحیح و ترجمهٔ برگرن و ون بروملن [۱۹۹۹]). نوشته‌های هندسی کوهی در منابع دیگر نیز به همین ترتیب موجود است، باقی‌مانده‌هایی در آثار سجزی [برگرن و هوخندایک ۲۰۰۴]، و (علاوه بر همهٔ این‌ها) در یک ترجمهٔ هلندی قرن هفدهمی [هوخندایک ۲۰۰۸سی] از این جمله است.[1] کوهی در آثاری که دربارهٔ کاربردهای عملی هندسه نوشته، تلاش‌هایی فراتر از شاخهٔ هندسهٔ محض انجام داده است، اما برای رسیدن به هدفش به هندسهٔ اقلیدسی تکیه کرده است. از مصادیق این تلاش‌ها، یکی رسالهٔ او در توضیح روشی برای یافتن فاصلهٔ شهاب‌ها است [برگرن و ون بروملن، ۲۰۰۱ب؛ راشد ۲۰۰۱]، و دیگری یافتن زاویهٔ شیب نسبت به افق وقتی صفحهٔ ناظر دارای ارتفاع است (برای تصحیح و ترجمهٔ انگلیسی بنگرید به راشد [۲۰۰۱]، و برای دسترسی به پاسخ انتقادی ریاضیدان ایرانی قرن ششم/دوازدهم، سمؤال، بنگرید به برگرن و ون بروملن [۲۰۰۳]). اثر کوهی دربارهٔ اسطرلاب و تصویر گنج‌نگاشتی، که پیش از مقالهٔ حاضر تصحیح و ترجمه شده است (راشد ۱۹۹۳ و برگرن ۱۹۹۴)، توسط آبگرال [۲۰۰۰] بررسی شده و با شرح ابن سهل و رساله‌ای مشابه از صاغانی مقایسه شده است. کوهی در مکاتبه‌اش با ابواسحاق صابی، به مرکز جرم برخی حجم‌های هندسی پرداخته است (این مکاتبه برای نخستین بار در ۱۹۸۳ توسط برگرن تصحیح و به انگلیسی ترجمه شد؛ توسط آبگرال [۲۰۰۴ب] تصحیح و به فرانسوی ترجمه شده است و توسط همو [۲۰۰۴آ] و بَنسِل [۲۰۰۱] بررسی شده است، دومی همراه با چندین متن مرتبط دیگر چاپ شده است). کوهی، حتی هندسه را در فلسفه نیز به کار برده، و برای پذیرش نظر ارسطو دربارهٔ امکان حرکت یک مسافت نامحدود در یک زمان محدود، از تصویر کردن یک نیم‌دایره بر شاخهٔ کاملی از یک هذلولی استفاده کرده است [راشد، ۱۹۹۸؛ راشد ۱۹۹۹آ].

ابن هود و استکمال: دومین ریاضیدانی که توجه پژوهشگران را به خود جلب کرد، یوسف المؤتمن بن هود، حاکم ساراگوسا در اسپانیا، در اواخر قرن پنجم/یازدهم است. شاهکار او، کتاب الاستکمال (برخلاف عنوانش، این کتاب هرگز به پایان نرسید) که بیشتر در هندسه است، به دلیل تأثیر بسیاری که داشت و در رساله‌های دیگر به آن ارجاع داده شده، شناخته شده است. اما تا سال ۱۹۸۶ که هوخندایک از کشف بیشتر محتوای آن خبر داد، گمان می‌رفت که این کتاب مفقود شده است. در سال ۱۹۹۷ جبار نسخه‌ای خطی از رسالهٔ ابن سَرتاق مربوط به قرن هشتم/چهاردهم پیدا کرد که شامل تحریری از متن کامل آن و بخش‌هایی است که در نسخه‌های دیگر وجود ندارد [جبار، ۱۹۹۷]. هوخندایک [۲۰۰۳سی] فهرستی تحلیلی از عناوین بخش‌های هندسی این اثر

۱. این مقالهٔ هوخندایک در مجلهٔ تاریخ علم، شمارهٔ ۶ (سال ۱۳۸۷)، ص 36-1 منتشر شده است.- م

فراهم کرده که با کشف اثر ابن سرتاق تکمیل شده، و بـه فهرسـت عنـاوینی کـه در ۱۹۹۱ در اسـناد بین‌المللی تاریخ علم چاپ کرده، ضمیمه شده است.

هوخندایک پیش‌تر، در مجموعه‌ای از پژوهش‌هـایی کـه پـیش از سـال ۱۹۹۵ انجـام داده بـود، شروع به تحلیل محتوای کتاب الاستکمال کرده بود. از آن به بعد، شـماری از پژوهشـگران بـه ایـن پژوهش ملحق شدند. جبار [۱۹۹۹] که علاقه‌اش به این متن موجب شد آن را کشف کند، پژوهشی دربارهٔ فصل اول آن کتاب با موضوع حساب انجام داد، که در آن اشاره می‌کند که مؤتمن مطالب این فصل را از مقالهٔ دوم (که آن را بیشتر در یک قالب حسابی بیان کرده تا در قالب اصـلی هندسـی آن) مقالهٔ هفتم، و مقالهٔ نهم اصول گرفته است، چنانکـه برخـی از مطالـب را از مقدمـه‌ای بـر حسـاب نیکوماخوس گرفته است. در کتـاب راشـد [۱۹۹۶ب] تصـحیح و ترجمـهٔ فرانسـوی چنـدین قضـیهٔ هندسی، با موضوع‌هایی از قبیل مقاطع مخروطی و مساحت بخشی از سهمی آمده است. اثر راشـد [۲۰۰۲ب] شامل مجموعه‌ای از قضایای کتاب الاستکمال است که به آثار ابن هیثم دربارهٔ تحلیـل و ترکیب، به‌ویژه تحلیل توسط معلوم‌ها ارتباط دارد. ما مطالبی اصیل دربارهٔ اُکَر نیـز در ایـن کتـاب پیدا کـردیم؛ راشـد و هـوجَیری [۲۰۱۰] بـه اثـر مـؤتمن در تعمـیم نتیجـه‌ای کـه در اصـل توسـط تئودوسیوس مطرح شده اسـت، پرداختـه‌انـد، و هوخنـدایک [۱۹۹۶سـی] نسـخه‌ای خطـی از اُکَـر منلائوس را که مؤتمن باید از آن استفاده کرده باشد شناسایی کرده اسـت. گرگـور [۲۰۰۵] اسـتفادهٔ مؤتمن از قضیهٔ فیثاغورس را بررسی کرده، و همـو [۲۰۰۹] بـه «اثبـات» گـزارهٔ تـوازی توسـط وی پرداخته است. و نهایتاً، مؤتمن رهیافتی را که ابن هیثم برای حل قضیه‌اش در المناظر بـه کـار بـرده، ساده کرده است [هوخندایک، ۱۹۹۶آ]. به نظر می‌رسد که خود مؤتمن، رساله‌ای با عنـوان المنـاظر نوشته، اما مفقود شده و هوخندایک گمان نمی‌کند که این اثر، نسبت به اثر معروف ابن هیـثم گـامی مهم‌تر به‌سوی جلو برداشته باشد.

مسائل هندسی طبقه‌بندی‌شده: هندسه در طول دورهٔ اسلامی به‌صـورت حـوزه‌ای فعـال بـاقی ماند، اما به‌تازگی توجه پژوهشگران بر دوره‌های آغازین متمرکز شده است.

- المدخل الی الهندسه از قسطا بن لوقا که بیشترش از منابع یونـانی اقتبـاس شـده اسـت توسـط گرگور در بخش عربی شمارهٔ ششم مجلهٔ سهیل (۲۰۰۶) به زبان عربی در دسترس قرار گرفتـه و توسط هوخندایک [۲۰۰۸آ] به انگلیسی ترجمه شده و مورد بحث قرار گرفته است.
- نُعَیم بن محمد بن موسی، احتمالاً پسر یکی از بنوموسی، در اواخر قرن سـوم/نهم مجموعـه‌ای از مسائل هندسی طبقه‌بندی‌شده و حـل آن‌هـا را تـألیف و هوخنـدایک [۲۰۰۳ب] ایـن اثـر را تصحیح و به انگلیسی ترجمه کرده است. راشد و هوزل [۲۰۰۴] آن را تصحیح و بـه فرانسـوی ترجمه کرده‌اند. پانتسا [۲۰۰۸] اظهار می‌کند که رسالهٔ نُعَیم، بـا تحویـل مسـائل هندسـی بـه

معادلاتی از همان نوع که در جبر خوارزمی دیده می‌شود، برهانی به کار برده است کـه می‌تـوان آن را به شکل هندسی توضیح داد.

- چند اثر هندسی از ثابت بن قره، شامل لِم‌های مختلف و ترسیم چهارده‌وجهی نیمه‌منـتظم، کـه در کار راشد [۲۰۰۹ای] عرضه و به فرانسوی ترجمه شده‌اند.

بسیاری از آثـاری کـه هـم اکنـون در حـال چـاپ هسـتند متعلـق بـه قـرن‌هـای چهـارم/دهم و پنجم/یازدهم هستند. ما در حال نزدیک شدن به خیل عظیمی از منـابع هسـتیم کـه بـه‌زودی اجـازه خواهند داد گزارش معتبری از این دورهٔ بسیار مهم نوشته شود. رساله‌هایی که هنـوز ذکـر نشـده‌انـد بدین شرحند:

- راشد [۲۰۰۰ای] متونی دربارهٔ ترسیم هفت‌ضلعی منتظم، یکی از مسائل هندسی همیشگی در ریاضیات دورهٔ اسلامی، را تصحیح کرده است. مؤلفان ایـن متـون شـامل ابوالجـود، سـجزی، کوهی، شَنّی و کمال‌الدین بن یونس می‌شوند.
- راشد و بلوستا [۲۰۰۰] پنج اثر از ابراهیم بن سنان در منطـق و هندسـه تصـحیح کـرده‌انـد کـه شامل شرح حال خود نوشت او، رسالة فی مساحة القطع المخروط المکافی (فقط شـرح؛ مـتن در راشد [۱۹۹۶ب]) رسم القطوع الثلاثه، فی آلات الاظلال، و المسائل المختارة است.
- کروزه پژوهش‌های گوناگونی دربارهٔ آثار هندسی سجزی انجام داده است که شـامل پـژوهش او [کروزه، ۲۰۰۴آ] دربارهٔ راه حل‌های سجزی برای تقسیم یـک چندضـلعی بـه چنـد بخـش بـر اساس شروط مختلف، و پژوهش دیگری [کروزه، ۲۰۱۰] دربارهٔ کارهای سجزی با تبدیل‌هـا و مقادیر ثابت هندسی می‌شود. ما پیشتر به شرح سجزی بر اصـول [چـاپ شـده توسـط کـروزه، ۱۹۹۷] اشاره کردیم؛ همچنین بنگرید به مقالهٔ کروزه [۱۹۹۹] که در آن از اثر سجزی بـه‌عنوان نمونه‌ای از نیاز دانشوران به توجه بیشتر به اشکال هندسی در نسخه‌های خطـی عربـی اسـتفاده کرده است. بلوستا [۱۹۹۹] به مطالعهٔ نسخهٔ خطی شمارهٔ ۲۴۵۷ کتابخانهٔ ملی پاریس، شـامل چند رسالهٔ هندسی به خط خود سجزی پرداخته است؛ این سند به ما اجازه می‌دهد که شهادت دهیم وقتی یک ریاضی‌دان نقش کاتب را ایفا می‌کند، چه اتفاقی می‌افتد.
- آثار ابوسعید ضریر جرجانی در اواخر قرن چهـارم/دهم، بـا عنـوان‌هـای المسـائل الهندسـیه و استخراج من کتاب آنالما والبرهـان علیـه توسـط هوخنـدایک [۲۰۰۱ب] چـاپ شـده اسـت. هوخندایک تأثیر اثر نخست بر بیرونی و ابن هیثم را نشان داده است.
- راشد [۲۰۰۲ب] تصحیح متن عربی و ترجمهٔ فرانسوی شش اثـر از ابـن هیـثم دربـارهٔ هندسـهٔ مسطح را، شامل دو اثر دربارهٔ «تحلیل توسط معلوم‌ها» و یک اثر فلسفی که در آن به مخالفـت با تعریف ارسطویی مکان پرداخته، چاپ کرده است (در یک مجلد قدیم‌تر از همـین مجموعـه

که پیش از نقطهٔ آغاز تاریخی مقالهٔ حاضر چاپ شده است، راشد فرض کرده کـه دو ابـن هیـثم وجود داشته است، یکی فیلسوف و دیگری ریاضیدان؛ صبره [۱۹۹۸، ۲۰۰۲ب] مخـالف ایـن فرضیه بود).

شاخه‌هایی که به هندسه پیوستند

معماری: معماری در بین برجسته‌ترین کاربران هنر هندسی قرار داشت. دولد- سمپلونیوس سال‌ها پژوهش‌های ارزشمندی دربارهٔ نقش ریاضیات در ساخت انـواع مختلفـی از سـاختمان‌هـا، بـه‌ویژه آن‌هایی که اهمیت مذهبی داشتند، انجام داد. او تلاش‌هایش را خلاصه کرده [دولـد- سـمپلونیوس، ۲۰۰۳]، و در آنجا ساختارها را همراه با محاسبات لازم برای قوس‌ها، گنبدها، قبه‌ها (آرامگاه‌ها)، و مقرنس‌هـا توضـیح داده اسـت. برخـی از ریاضـیدانان نـامی، از جملـه ابـن هیـثم و کرجـی،و نیـز ریاضیدانان کمتر شناخته شده (مانند احمد بن ثابت و محمد بن بهاءالدین عاملی) در جنبهٔ ریاضی [معماری دورهٔ اسلامی] سهیم بـوده‌انـد. یکـی از فعـال‌تـرین شخصـیت‌هـا در حـوزهٔ ریاضـیات و معماری، دانشمند مشهور ایرانی قرن نهم/پانزدهم، جمشید کاشانی است که محاسبات مربـوط بـه قوس‌ها و گنبدها را در مفتاح الحساب خود آورده است [دولـد- سـمپلونیوس، ۲۰۰۰]. الگوهـای تزئینی دیوارهای بناهای مذهبی نیز توجه هندسه‌دانان را به خود جلب کرده اسـت. سَکّال [۱۹۹۵] هندسهٔ گنبدهای تَرکین، به‌ویژه در اسپانیا و شـمال آفریقـا را بررسـی کـرده اسـت. اُزدورال [۱۹۹۶، ۲۰۰۰، ۲۰۰۲] آنچه را که «گروه مباحثه» بین هنرمندان و ریاضیدانان دربارهٔ پیدایش ایـن الگوهـا می‌نامد، معرفی کرده و توضیح داده است. ازدورال بر اثری قرن چهارمی/دهمی از ابوالوفا بـا عنـوان کتاب فی ما یحتاج الیه الصانع من اعمال الهندسه و نیز بر اثری قرن هفتمی/سیزدهمی با عنوان فـی تداخل الأشکال المتشابهة أو المتوافقة از مؤلفی نامعلوم تمرکز کـرده اسـت. فنـون مربـوط بـه ایـن مسائل، اغلب بر اساس روش‌های چسب و قیچی هستند. در موارد پیچیده‌تر، وقتی راه حلی هـم‌ارز با راه حل معادله‌های درجهٔ سوم لازم بود، ترسیم‌های بـه روش «میـل»،احتمـالاً بـه دلیـل سـهولت استفاده از آن‌ها در عمل، بر راه حل‌های مبنی بر مقاطع مخروطی مـرجّح بودنـد (بـرای ایـن مـورد به‌ویژه بنگرید به مقالهٔ اوزدورال [۲۰۰۲]). سرهنگی [۲۰۰۸] ترسیم بیست‌وجهـی و دوازده‌وجهـی محاط در کره را در رسالهٔ ابوالوفا آزموده و اظهار کرده که اولی نادرست است.

مساحی: کاربردهای مساحی بین هندسهٔ محض و محاسبات عملی مشترک اسـت. ایـن حـوزهٔ مطالعه شده، می‌تواند وجود علاقهٔ بسیار زیاد به ترکیبی از دو سنت موجود را که بـه تـأثیر هندسـه و جبر اقلیدسی مربوط می‌شود، ثابت کند. به‌تازگی دو اثر در این حوزه بررسی شده‌اند. اولـی، کتـاب المساحة تألیف ریاضیدان مصری اواخر قرن سوم/نهم، ابوکامل است [سزیانو، ۱۹۹۶ب] که شامل

دستورالعمل‌هایی برای یافتن مساحت و حجم تعدادی از اشکال و اجسام، و نیز چند مورد از تقریب‌های مسّاحان در میان فرمول‌های دقیق است [بنگرید به مقالهٔ سزیانو با عنوان «رسالهٔ مساحی ابو کامل» در کتاب از اسکندریه تا بغداد مذکور در پانویس شمارهٔ ۱ صفحهٔ اول مقالهٔ حاضر]. دومی، رسالة فی التکسیر از ابن عبدون است (جبار [۲۰۰۶]، همراه با متن عربی در شماره‌های پنجم و ششم مجلهٔ سهیل) که تا حد زیادی همان موضوع را پوشش می‌دهد. جذابیت ویژهٔ متن دوم این است که این متن نخستین شاهد اندلسی یک سنت شرقی است که پیش از رسیدن جبر یا هندسهٔ اقلیدسی به صحنه، وجود داشته است.

عدد پی: در ادامهٔ تعامل بین هندسه و محاسبه، البته با بازگشت به اساس ریاضی، به پژوهش‌های مختلفی مربوط به محاسبهٔ عدد پی توسط ریاضیدان ایرانی قرن نهم/پانزدهم، جمشید کاشانی، برمی‌گردیم. رسالهٔ محیطیهٔ او، که در آن عدد پی را برای اولین بار تا شانزده رقم اعشار محاسبه کرده است، قبلاً به آلمانی و روسی ترجمه شده اما هیچ وقت به انگلیسی ترجمه نشده است. آذریان [۲۰۰۴] با ترجمهٔ قضیهٔ بنیادینِ رسالهٔ محیطیهٔ کاشانی، ترجمهٔ مقدمه (شامل انتقاد کاشانی از آثار پیشین توسط ابوالوفا و بیرونی) (آذریان [۲۰۰۹])، و خلاصه‌ای از مندرجات ریاضی این اثر (آذریان [۲۰۰۱])، بخشی از متن را در دسترس خوانندگان انگلیسی زبان قرار داده است. هوخندایک [۲۰۰۸ب] کل متن را چاپ عکسی کرده و استدلال‌های کاشانی را با نمادهای جدید ریاضی بازنویسی کرده است.[1] او روش کاشانی را با اثری در همین زمینه تألیف دو ریاضیدان اواخر قرن هفدهم میلادی (قرن یازدهم قمری)، آدریان ون رومن و لودولف ون کولن مقایسه کرده، و به این نکته فکر کرده است که شباهت قابل توجه موجود بین ون کولن و کاشانی می‌تواند با دِین مشترک آنان به اثر ارشمیدس توضیح داده شود. هوخندایک [۲۰۰۷] این شباهت را با جزئیات بیشتر کاویده است.

موضوع‌های فلسفی: استدلال‌های ریاضی، که معمولاً اما نه منحصراً هندسی بودند، اغلب برای حل مسائل دشوار فلسفی که به‌طور کلی برای اولین بار توسط ارسطو مطرح شده بود به کار می‌رفت. اِلبِزری [۲۰۰۷] دربارهٔ دفاع فیلسوف اوایل قرن هفتم/سیزدهم، عبداللطیف بغدادی، از تعریف ارسطویی مکان در «فیزیک»، در مقام واکنشی در برابر استفادهٔ ابن هیثم از هندسه برای ردّ ارسطو و ردّ ادعای «سلطهٔ فلسفه» بحث کرده است (اِلبِزری فرضیهٔ راشد مبنی بر وجود دو ابن هیثم را می‌پذیرد). نصیرالدین طوسی برای اثبات چگونگی صدور کثرت از وحدت در فلسفهٔ مبتنی

۱. چاپ عکسی رنگی نسخه‌ای از این اثر به خط مؤلف به همراه مقدمهٔ فارسی و انگلیسی و تجدید چاپ تصحیح پاول لوکای از متن رساله به کوشش یونس کرامتی منتشر شده است (مؤسسهٔ پژوهشی میراث مکتوب، ۱۳۹۱).-م

بر صدور نوافلاطونی، از روش‌های ترکیبی استفاده می‌کند (مقالهٔ راشد [۱۹۹۹ب] به فرانسوی؛ و همچنین بنگرید به مقالهٔ راشد [۲۰۰۰ب]؛ و مقالهٔ راشد [۲۰۰۰د] به آلمانی). راشد [۲۰۰۳ب] این دنبالهٔ تاریخی را تا اثر ابراهیم حلبی دنبال می‌کند، کسی که ارتباط ترکیبی را پیش‌تر برد و رساله‌ای نوشت که «تا آنجا که می‌دانیم نخستین رساله‌ای است که تماماً به تحلیل ترکیبی اختصاص یافته است».

مفاهیم بی‌نهایت بزرگ و بی‌نهایت کوچک اغلب، بازتاب‌هایی را برانگیخت که شکاف بین فلسفه و ریاضیات را پر کرد. [در این راستا] پیشتر به رسالهٔ کوهی در پاسخ به نظر ارسطو دربارهٔ امکان حرکت نامتناهی در زمان متناهی اشاره کردیم [راشد ۱۹۹۸؛ راشد ۱۹۹۹آ]. مک گینیس [۲۰۰۶] اظهار می‌کند که تحلیل ابن‌سینا از حرکت در یک لحظه، اگر در معنای ریاضی محض شامل مفهومی از حد نباشد، دست کم در یک معنای ارسطویی شامل این مفهوم است. مجموعه‌ای از مکاتبات ثابت بن قره و یکی از شاگردانش شامل ادعای او، در مخالفت با ارسطو، مبنی بر وجود واقعی بینهایت است [صبره، ۱۹۹۷].

اینکه روش‌های مربوط به مبحث بی‌نهایت کوچک‌ها، به‌واقع در رساله‌های ریاضی یا فلسفی دورهٔ اسلامی وجود داشته است یا نه، نقطهٔ پیوند بین جویندگان نوآوری در این متون و جستجوگران ریشه‌ها در سنت یونانی است. دیدگاه راشد در عنوان مجموعهٔ پنج جلدی او شامل تصحیح و ترجمهٔ فرانسوی متون، ریاضیات بی‌نهایت کوچک‌ها از قرن سوم/نهم تا پنجم/یازدهم، روشن است ([راشد، ۱۹۹۶ب؛ راشد ۲۰۰۰ای؛ راشد ۲۰۰۲ب؛ راشد ۲۰۰۶] - جلد دوم که تاریخ آن ۱۹۹۳ است، خارج از محدودهٔ این بررسی است). هرچند بسیاری از آثاری که راشد در جلدهای آخر این مجموعه به آن‌ها پرداخته است ارتباط مستقیمی با این موضوع ندارند، برخی از آن‌ها با یافتن مساحت و حجم اشکال منحنی سر و کار دارند. پاسخ‌های راشد، سوابق یونانی متون عربی در مواردی چون روش اِفنا را می‌یابد. (دو رسالهٔ ابن هیثم به تصحیح راشد [۲۰۰۲ب] ارتباط فلسفی عام‌تری دارند: یکی دربارهٔ معنی «معلوم» در بستر تحلیل و ترکیب است، و دیگری دربارهٔ تعریف ارسطویی «مکان» بحث می‌کند) روژانسکایا [۱۹۹۷] (بر خلاف برخی از نخستین شارحان) با ادعای این‌که ثابت بن قره و بیرونی وقتی با حرکت متغیر خورشید در طول دایرة‌البروج روبرو بودند روش‌های مربوط به بی‌نهایت کوچک‌ها را به کار می‌بردند، بحث را به سمت نجوم ریاضی می‌بَرَد. راشد [۲۰۱۰ب] نیز باقی‌ماندهٔ عربی اثبات آپولونیوس را دربارهٔ اینکه هذلولی و مجانب‌های آن در بی‌نهایت به هم می‌رسند، در اثری از ابن‌کشنهٔ قمی، یکی از اخلاف سجزی، پی می‌گیرد.

سرانجام برای مرور کلی فلسفه و ریاضیات در دورهٔ اسلامی بنگرید به مقالهٔ اِنْدرِس [۲۰۰۳]. در میان دیگر موضوعات، این مقاله به واکنش دانشمندان دورهٔ اسلامی در برابر سنت افلاطونی

(به‌ویژه نوشته‌های کِنْدی)، آثار ارسطو دربارهٔ فلسفه و آثار ابن هیثم دربارهٔ ریاضیات به‌عنوان دانش‌های تخصصی هر یک از آن‌ها، و نیز به تعامل بین علم و دین می‌پردازد.

نورشناسی: مقدمات دانش نورشناسی در دورهٔ اسلامی تحت تأثیر جاذبهٔ المناظر اقلیدس قرار گرفت. این فرایند کمی پیچیده است، اما ماجرای آن تا حد زیادی در سال‌های اخیر روشن شده است. خیراندیش [۱۹۹۹] پنج متن عربی شناخته شده را به‌صورت یک متن درآورده که با تقریب خیلی خوبی مانند متن اصلی یونانی است که در حدود سال ۸۰۰ میلادی (۱۸۴ قمری) ترجمه شده است. چنانکه وی [۱۹۹۶] اظهار می‌کند، زبان منعطف عربی (به‌ویژه دربارهٔ تعاریف) رشد این شاخهٔ علمی را از راه‌هایی ممکن ساخته است که زبان خشک‌تر یونانی چنین اجازه‌ای نمی‌داد. کتاب خیراندیش شامل تصحیح انتقادی تحریر کتاب المناظر کِنْدی است و به شرح طوسی نیز می‌پردازد. راشد [۱۹۹۷ب] به وجود شرح کِنْدی اشاره و اظهار کرده است که دو شکل شناخته شده از المناظر یونانی کاملاً مستقل از دو شکل عربی آن است. این شرح و تعداد دیگری از نوشته‌های کِنْدی دربارهٔ نورشناسی (شامل کهن‌ترین متن عربی دربارهٔ آینه‌های سوزان) در کتاب راشد [۱۹۹۷د] گردآوری و تصحیح شده است. راشد در این باره بحث می‌کند که درک کِنْدی از نورشناسی نسبت به بیان هندسی اقلیدس، به واقعیت فیزیکی نزدیک‌تر است.

نورشناسی دورهٔ اسلامی بیش از اقلیدس، تحت سلطهٔ اثر قرن پنجمی/یازدهمی ابن هیثم، یعنی المناظر بود، اما پیش از او پیشرفت مهمی در این زمینه رخ داد. توضیحاتی دربارهٔ علوم مختلف پیش از ۹۵۰/۳۳۹، در احصاء العلوم فارابی به‌اختصار آمده که در آن نورشناسی به‌عنوان یک شاخهٔ علمیِ مبتنی بر علوم ریاضی مطرح شده است. گزارش خیراندیش از این متن هشدار می‌دهد که این سنت، پیچیده‌تر از چیزی است که مطالعهٔ فهرست فارابی ممکن است مطرح کند [خیراندیش، ۲۰۰۳]. بهترین ریاضیدانانِ پیش از ابن هیثم به نورشناسی پرداختند: مثلاً طرح دو روش (و نه اثبات) برای ساخت یک آینهٔ هذلولوی توسط ابوالوفا در اواخر قرن چهارم/دهم از این جمله است. راشد توضیح نویگه باور دربارهٔ روش‌های ابوالوفا بر حسب هندسهٔ توصیفی را که پیش از آن منتشر نشده بود در اختیار گذاشته است [نویگه باور و راشد، ۱۹۹۹]؛ برخلاف نویگه باور، راشد برای توضیح این مطالب از «روش‌های نگاشت مخروطی»استفاده می‌کند. دربارهٔ کار ابن سهل و به کاربردن مقاطع مخروطی در نورشناسی بنگرید به بلوستا [۲۰۰۲ب]، و نیز دربارهٔ انتقال و ابداع در این زمینه که به‌ویژه با ابن سهل و ابن صالح در ارتباط است بنگرید به بحثی از راشد [۲۰۰۲سی]. اثر راشد [۲۰۰۵] که ترجمهٔ انگلیسی و بسط کتاب او با عنوان هندسه و نورشناسی در قرن دهم چاپ ۱۹۹۳ است، شامل تصحیح و ترجمهٔ اثر ابن سهل است.

عبدالحمید صبره سه مقالهٔ نخست از هفت مقالهٔ المناظر ابن هیثم را همراه با ترجمه و شـرح در ۱۹۸۳ و ۱۹۸۹ چاپ کرده است؛ مقالـه‌هـای چهـارم و پـنجم (فـی انعکـاس الأضـواء، و مواضـع الخیالات المبصرة بالانعکاس، فقط متن عربی) در سال ۲۰۰۲ منتشر شد [صبره ۲۰۰۲آ]. اسمیت تصحیح و ترجمهٔ انگلیسی مقاله‌های اول تا سـوم شـکل لاتینـی دگرگـون‌شـدهٔ ایـن اثـر [اسـمیت، ۲۰۰۱] و نیز مقاله‌های پنجم تا هفتم آن را [اسمیت، ۲۰۰۶] چاپ کرده است. معصومی همـدانی [۱۹۹۹] به موضوعات نسخهٔ خطی اثری مرتبط با دیگر رساله‌های نورشناسی ابن هیـثم، فـی ضـوء القمر، پرداخته است. صبره [۲۰۰۳] گزارشی فیزیکی از آنچه المناظر ابـن هیـثم را اثـری مبتکرانـه کرد داده است: این نخستین اثر عربی است که مستقیماً تحت تأثیر المناظر بطلمیوس، نظریهٔ تـابش نور در مقابل نظریهٔ تابش بصری (اینکه پرتوهای نور از چشم به جسـم مرئـی مـی‌تابنـد) را بـه کـار می‌گیرد، و عنصر روانشناسی رؤیت را نیز شامل است. ابن هیثم در مقالهٔ پنجم آنچه را کـه «مسـئلهٔ ابن هیثم» نامیده می‌شود مطرح می‌کند: اگر یک آینهٔ کروی، یک نقطهٔ دید و یک نقطهٔ تابش که هـر دو مقابل آینه هستند مفروض باشند، نقطه(های) بازتاب را بر سطح آینـه بیابیـد. اسـمیت [۲۰۰۸] چنین استدلال می‌کند که راه حل ابن هیثم، در حین مقایسه‌ای ناقص با تلاش‌های هویگنس در قرن هفدهم (که در یک ضمیمه چاپ شده است)، «شاهکاری» در استدلال ریاضی را نشان مـی‌دهـد. این بخش از کار ابن هیثم به کار مؤتمن بن هود، حاکم ساراگوسای اسـپانیا در قـرن پنجم/یـازدهم، که ریاضیات را ساده‌سازی کرد راه یافت [هوخنـدایک، ۱۹۹۶آ]. امـا بـه‌طور کلـی، چنانکـه صـبره [۲۰۰۷] اشاره می‌کند، به نظر می‌رسد شاهکار ابن هیـثم، تـا قـرن هفتم/سـیزدهم کـه کمال‌الـدین فارسی شرحی بر آن نوشت، واکنش‌های کمی در دورهٔ اسلامی در پی داشت؛ بیشتر واکنش‌هایی که پس از آن به وجود آمد از طریق شرح کمال‌الدین فارسی پالایش یافت.

روش‌های ریاضی در نجوم و جغرافیا

نجوم در دورهٔ اسلامی دست کم تا اندازه‌ای یک نظام علمی ریاضی بود. اما اهمیت صِرف پـژوهش در نجوم (هم در آن زمان و هم در حال حاضر) مـا را ملـزم بـه محـدود کـردن تمرکزمـان در اینجـا می‌کند زیرا به‌اندازهٔ کافی مطالب نجومی برای نوشتن یک مقالهٔ مروری دیگر وجـود دارد. در اینجـا بر جنبه‌هایی از نجوم دورهٔ اسلامی تأکید می‌کنیم که به‌طور ویژه با ابتکارات یـا روش‌هـای ریاضـی درگیر هستند. البته این خط مرزی مشکل‌ساز است، اما به هر حال باید دست به انتخاب زد.

مثلثات: بیشتر مطالعات محدودی که دربارهٔ قوس‌ها، زاویه‌ها، و طول‌ها در شکل‌های هندسـی انجام شده، در نجوم ریاضی بوده و در واقع مبنای آن بوده است. در واقـع یـافتن آثـاری مربـوط بـه مثلثات که مستقل از نجوم باشند و پیش از اواخر دورهٔ اسلامی نوشـته شـده باشـد، دشـوار اسـت.

(گزارشی از تاریخ روش‌های مثلثاتی در نجوم و جغرافیای دورهٔ اسلامی در ریاضیات آسمان و زمین: تاریخ کهن مثلثات [ون بروملن، ۲۰۰۹، ص ۱۳۵-۲۲۲] قابل دسترسی است). کمّی‌سازی حرکت‌های اجرام آسمانی نیازمند جدول سینوس (گاهی تابع یونانی وتر) به‌عنوان یک نقطهٔ آغاز بود و شاخصهٔ کلیدی زیربنایی جدول سینوس، سینوس یک درجه بود (برای بحثی دربارهٔ مفاهیم توابع مثلثاتی در نجوم دورهٔ اسلامی بنگرید به موسی [۲۰۱۰]). تعدادی از روش‌های ملهَم از هندسه، محاسبهٔ تقریبی این کمیت را پیشنهاد می‌کردند، اما این مسئله سرانجام توسط دانشمند ایرانی جمشید کاشانی در اوایل قرن نهم/پانزدهم، با به کارگیری روشی جبری، یعنی تقریب‌های پیاپی برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم با ریشهٔ سینوس یک درجه، حل شد. رسالة فی استخراج جیب الدرجة الواحدة الهام گرفته از کاشانی، مورد توجه احمدوف و روزنفلد [۲۰۰۰] قرار گرفته است. هرچند این رساله در نسخه‌های خطی متعددی به قاضی‌زادهٔ رومی منسوب شده است، احمدوف و روزنفلد استدلال می‌کنند که نویسندهٔ اصلی، حامی کاشانی، یعنی الغ‌بیگ است. روزنفلد و هوخندایک [۲۰۰۲]، جایی که روزنفلد نظرش دربارهٔ انتساب رساله به الغ‌بیگ را حفظ می‌کند و هوخندایک از قاضی‌زاده طرفداری می‌کند، این بحث را ادامه داده‌اند. مقالهٔ اخیر شامل ترجمهٔ انگلیسی است و چاپ عکسی تمام رساله به آن ضمیمه شده است.

مثلثات کروی، که به‌طور ویژه برای کسانی مهم است که به نجوم ریاضی می‌پردازند، دستخوش انتقالی هیجان‌انگیز در اواخر قرن چهارم/دهم و اوایل قرن پنجم/یازدهم شد؛ اما پیش از آن میراث یونانی قدرتمندی وجود داشت. نتیجهٔ بنیادین، قضیهٔ منلائوس بود، که در دورهٔ اسلامی «شکل قطّاع» نامیده می‌شد. قضیهٔ منلائوس در واقع [شامل] دو قضیهٔ مختلف است، که هر کدام از آن‌ها با نسبت سینوس‌های شش کمان در یک چهارضلعی سر و کار دارد. ثابت بن قره در اواخر قرن سوم/نهم دو رساله با عنوان‌های کتاب فی الشکل الملقب بالقطاع و کتاب فی تألیف النسب دربارهٔ این موضوع نوشته است. لورچ [۲۰۰۱] تصحیح انتقادی و ترجمهٔ انگلیسی هر دو رساله را چاپ کرده است (همچنین بنگرید به توضیحات لورچ دربارهٔ شرحی کوتاه بر رسالهٔ نخست توسط مسلمة المجریطی [لورچ ۱۹۹۶آ] و پژوهش نابلوخ دربارهٔ ترجمهٔ لاتینی این اثر [راشد، ۲۰۰۹ای])؛ بلوستا [۲۰۰۴ب] دربارهٔ اثر نخست (به‌ویژه دربارهٔ شکل‌های مختلف نسبت‌ها که در آن مطرح شده‌اند) و اثبات‌هایی که در آن آمده بحث کرده است. کتاب فی تألیف النسب‌که کروزه [۲۰۰۴ب] به آن پرداخته است، به دلیل بیان ماهرانهٔ مباحث ترکیبی به‌صورت نسبت‌ها با روش‌های مختلف، و نیز جایگزین کردن تعریف اقلیدسیِ نسبت با تعریفی حسابی، قابل توجه است. کروزه اشاره می‌کند که ثابت بن قره در حال پیش‌بینی راه‌های جدید درک مفاهیمی از نسبت بود که از یونانیان به ارث رسیده بود و راه‌های درک آن در قرن‌های بعد مطرح شد.

داستان قضایایی که جایگزین قضیهٔ منلائوس شدند، مانند قانون مقادیر چهارگانه و قانون سینوس‌ها، توسط بیرونی در مقالید علم الهیئة گفته شده، دوبارنو این اثر را در سال ۱۹۸۵ چاپ و سعیدان [۲۰۰۰] آن را همراه با آثاری دیگر از بیرونی دربارهٔ مثلثات مسطح خلاصه کرده است. هرچند این قضایا ظاهراً برای اولین بار در شرق جهان اسلام به وجود آمدند (برای خلاصه‌ای اجمالی بنگرید به بولاهیا [۲۰۰۷])، به نظر می‌رسد از طریق اثر ابن معاذ به‌سرعت راه خود را به اندلس (اسپانیا) یافتند. به نظر می‌رسد نتایج جدید برای مؤتمن بن هود، حاکم دانشمند ساراگوسا، شناخته شده نبوده است، اما کتاب الاستکمال او چند نوآوری در زمینهٔ هندسهٔ کروی را، شامل تعمیم قضیه‌ای از اُکَر تئودوسیوس و ادغام سه قضیه از اُکَر منلائوس [راشد و هوجَیری، ۲۰۱۰] در بر می‌گیرد.

روش‌های ترسیمی، گاه به‌صورت منحنی‌هایی حک‌شده بر ابزارهای برنجی، برای حل مسائل مثلثاتی به کار می‌رفت. لورچ [۱۹۹۸] آثار مؤلفان قرن سوم/نهم، حبش حاسب و ماهانی که این روش‌ها را برای حل مسائل نجوم کروی به کار برده‌اند، بررسی کرده است. برخی از این راه حل‌ها آنالماها هستند، بقیه حتی منشأ هندسی هم ندارند. لورچ [۲۰۰۰ب] دو متن قرن چهارمی/دهمی دربارهٔ ربع مُجَیَّب را بررسی کرده است؛ راه حل‌هایی که در این رساله‌ها دیده می‌شوند، شباهت‌های آشکاری با روش‌های ترسیمی حبش و ماهانی دارند. همچنین برای توضیحی دربارهٔ یک ربع مُجَیَّب «مُجَنَّح» مربوط به قرن هشتم/چهاردهم بنگرید به مقالهٔ شارت [۱۹۹۹].

ریاضیات در نظریهٔ سیاره‌ای: طراحی الگوهایی برای حرکات سیارات کاربردهای اصلی مثلثات بودند و روش‌های ریاضی ادامه یافتند تا نقشی بنیادین در ساخت الگوهایی جدید و مؤثرتر در دورهٔ اسلامی ایفا کنند. اما بحث مورلون دربارهٔ تعامل بین نجوم فیزیکی و نجوم ریاضی به این نکته می‌پردازد که جنبهٔ ریاضی نجوم توجه پژوهشگران جدید را به اهمیت جنبهٔ فیزیکی آن سوق داد، و دنباله‌ای از الگوهای نجومی پیشرفته که در دورهٔ اسلامی شکل گرفت از طریق هر دو جنبهٔ فیزیکی و ریاضی به پیش برده شد [مورلون ۱۹۹۹].

سنت انتقاد از الگوهای نجومی بطلمیوس دست کم از زمان ابن هیثم آغاز شد. هدف از این انتقادات بیش از این‌که دست‌یابی به الگویی بهتر و منطبق با داده‌های نجومی باشد، دستیابی به الگویی بود که با اصول فلسفی و جهان‌شناختی، یعنی حرکت مستدیر یکنواخت منطبق باشد. طرح پیشنهادهایی برای الگوهای بهبودیافته، با شور و حرارت بسیار در قرن هفتم/سیزدهم، با پیشنهاد مؤیدالدین عُرْضی برای جایگزین کردن فلک معدل‌المسیر با به‌کارگیری نتیجه‌ای که «لِم عُرْضی» نامیده می‌شود،آغاز شد. پژوهشی بنیادین دربارهٔ عُرضی نخستین بار در سال ۱۹۹۰ توسط صلیبا انجام شد و ویرایش سوم آن در سال ۲۰۰۱ [صلیبا، ۲۰۰۱] منتشر شد.دانشمند معاصر عُرضی،

نصیرالدین طوسی، مُبدِع «جفت طوسی» بود: یک جفت دایره که با سرعت مستدیر یکنواخت حرکت می‌کنند و با این حال منجر به ایجاد نقطه‌ای می‌شوند که در امتداد خطی مستقیم سیر می‌کند. این ابزار به طوسی امکان می‌داد که بخش‌هایی از یک الگوی سیاره‌ای را بدون نقض حرکت دایره‌ای یکنواخت از مرکز آن دور یا به مرکز آن نزدیک کند. رجب [۲۰۰۰] دربارهٔ منشأ و ابداع جفت طوسی در آثار نجومی وی، با شناسایی الهاماتی جزئی از الگوی قدیم‌تر ابن هیثم، بحث کرده است. تمامی این پیشرفت‌ها، موجب طرح این حوزهٔ مطالعاتی می‌شود که کدام یک از ملاحظات فلسفی باید با نجوم تعامل داشته باشد؛ برای یک بررسی اجمالی [در این زمینه] بنگرید به دلال [۲۰۱۰] (ص ۵۴-۸۹).

هرچند الگوهای جدید معمولاً برای محاسبهٔ موقعیت سیارات به کار نمی‌رفتند، یک استثناء در زیج خاقانی جمشید کاشانی یافت می‌شود که شامل محاسباتی کامل برای تعیین موقعیت زهره است. کاشانی در محاسباتش از الگویی استفاده می‌کند که برگرفته از ابن هیثم و طوسی است و فلک تدویر را با یک کره جایگزین می‌کند و مثلثات کروی را به کار می‌گیرد [ون بروملن، ۲۰۰۶]. اما مهم‌ترین تغییر در نقش ریاضیات در الگوهای سیاره‌ای خیلی دیر، در اثری از منجم قرن دهم/شانزدهم، شمس‌الدین خفری، رخ داد. خفری الگوهای چندگانه‌ای را برای یک پدیدهٔ سیاره‌ای به کار برد که موجب بازاندیشی دربارهٔ نقش ریاضیات در نجوم در مقام ابزاری الگوساز برای نجوم فیزیکی، در مقابله با دغدغهٔ ذهنی حقیقت امر، شد (این مطلب نخستین بار در مقاله‌ای از صلیبا در مجلهٔ تاریخ نجوم، در سال ۱۹۹۴ توضیح داده شد؛ همچنین بنگرید به صلیبا [۱۹۹۷] و صلیبا [۲۰۰۰]). گزارشی از ابداع تمامی این الگوها در کتاب صلیبا با عنوان علم اسلامی و شکل‌گیری نوزایی اروپا [صلیبا، ۲۰۰۷] آمده است، که (چنانکه دیدیم) شامل موضوع‌های دیگری همچون توجهی دوباره به ظهور علم در جامعهٔ اسلامی آغازین نیز می‌شود.

یک قضیهٔ ریاضی نادر دربارهٔ حرکت سیارات که بی‌اساس از کار درآمد، اقبال و ادبار نامیده می‌شود. برای توضیح کاهش تدریجی میل دایرةالبروج و تغییرات سرعت تقدیم اعتدالین که از رصدها به دست آمده بود، تئون اسکندرانی و اخلاف هندی و مسلمان او الگوهای هندسی بطلمیوسی را اصلاح کردند تا شامل حرکت رفت و برگشتی نقاط اعتدالین در طول یک کمان هشت درجه‌ای شود. مروری بر تاریخ کهن تقدیم اعتدالین از تئون تا مؤلفان شرقی آغاز قرن چهارم/دهم، ابراهیم بن سنان و بتانی در مقالهٔ رجب [۱۹۹۶] در دسترس است. بعدها، تقدیم اعتدالین ویژگی نجوم اندلسی و مغربی شد، این نظریه با منجمی از طلیطله به نام ابن زرقالی آغاز شد و در طول قرن هشتم/چهاردهم به دو مکتب جداگانه تفکیک شد [کومس، ۱۹۹۶؛ کومس، ۲۰۰۷]. به نظر می‌رسد متنی به زبان کاستیلی که احتمالاً باقی‌ماندهٔ بخشی از زیج مفقود ابن کَمّاد (از اخلاف بی

واسطهٔ زرقالی) است، با سومین الگو از الگوهای سه‌گانهٔ تقدیم اعتدالین زرقالی مطابقت دارد [مانچا، ۱۹۹۸]؛ شاباس و گلدشتاین در سال ۱۹۹۴ دومین الگوی زرقالی را منبع این متن فرض کرده بودند. چنانکه کالوُو [در مقاله‌اش در سال ۲۰۰۲ (که به سال خورشیدی و زمان‌سنجی نیز می‌پردازد)] توضیح داده است، در زیج ابن هائم که در اوایل قرن هفتم/سیزدهم نوشته شد، از ابن کمّاد به دلیل ترک مسلّم الگوهای زرقالی انتقاد شده است. کومِس [۲۰۰۱] تصحیحی از شرحی بر زیج ابن هائم فراهم کرده است؛ برخلاف معمول زیج‌های غربی، این زیج هیچ جدولی برای محاسبهٔ تقدیم اعتدالین ندارد. این زیج که بر اساس سومین الگوی زرقالی نوشته شده است، ترفندهایی از مثلثات کروی جدید را به کار می‌برد که برای جایگزین شدن قضیهٔ منلائوس ابداع شده‌اند. مرسیه [۱۹۹۶] جدول‌های تقدیم اعتدالین کتاب دربارهٔ حرکت فلک هشتم را که در چند نسخه از جدوال طلیطله آمده‌اند بررسی کرده و ادعای گرارد کرمونایی را مبنی بر اینکه کار ثابت بن قره منبع این اثر بوده، رد کرده است. چون این جدول‌ها برای کار با جداول طلیطله طراحی شده‌اند، منبع آن‌ها باید خیلی جدیدتر از کار ثابت بن قرّه باشد؛ بر اساس حدس مرسیه، منبع این اثر، کار زرقاله یا ابن کمّاد است. کومس [۲۰۰۲] متون مغربی از قرن هفتم/سیزدهم به بعد را، با عطف توجه به کاربرد تقدیم اعتدالین در پیش‌گویی‌های احکام نجومی و با اشاره به این‌که این متون الگوهای موجود را نقد می‌کنند اما آن‌ها را اصلاح نمی‌کنند، بررسی کرده است. سرانجام، دیاس-فاخاردو [۲۰۰۱] متنی از منجم مراکشی قرن نهم/پانزدهم ابوعبدالله بقّار، را بررسی کرده که در آن، بقّار به بررسی کار پیشینیان اندلسی خود دربارهٔ تقدیم اعتدالین پرداخته و عدم اطمینان خود از دانستن شکل کامل قضیه را بیان کرده است.

تسطیح کره: ساختار اسطرلاب، نمایشی از کرهٔ آسمان بر یک سطح صاف با به کارگیری تصویر گنج‌نگاشتی، انگیزه‌ای برای مطالعهٔ ریاضی تسطیح کره شد. یک متن یونانی بنیادین در این زمینه، تسطیح بسیط الکرة از بطلمیوس است که قبلاً دربارهٔ آن بحث کردیم و سیدولی و برگرن [۲۰۰۷] آن را به‌تازگی تصحیح و از عربی به انگلیسی ترجمه کرده‌اند. تصویر گنج‌نگاشتی به‌طور خاص به دلیل دو ویژگی ریاضی، مورد استفادهٔ منجمان سده‌های میانه بود: دایره‌ها در خلال رسم نقشه حفظ می‌شدند (بطلمیوس این مطلب را می‌دانست)، چنانکه زوایا حفظ می‌شدند (بطلمیوس این مطلب را دست کم به‌صراحت نمی‌دانست). بنابراین سازندگان اسطرلاب فقط باید دایره و خط بر سطح صاف رسم می‌کردند.

اسطرلاب در دورهٔ اسلامی موضوع رایجی بود. کهن‌ترین رسالهٔ کامل موجود در این باره که توسط دانشمند قرن سوم/نهم، فرغانی، در بغداد نوشته شد و به‌تازگی تصحیح و به انگلیسی ترجمه شده است [لورچ، ۲۰۰۵]، به دلیل اشتمالش بر جدول‌های عددی برای کمک به ابزارسازان شایان

ذکر است. در قرن چهارم/دهم، مطالعات مفصلی دربارهٔ اسطرلاب انجام شد، آبگرال [۲۰۰۰] گزارشی ریاضی از رساله‌های صاغانی، ابوسهل کوهی، و شرحی از ابن سهل بر رسالهٔ کوهی فراهم کرده است (که راشد [۱۹۹۳] و برگرن [۱۹۹۴] آن را تصحیح و ترجمه کرده‌اند؛ همچنین برای دو اثر باقی‌مانده از ابن سهل، که یکی از آن‌ها دربارهٔ تصویر گنج‌نگاشتی است، بنگرید به مقالهٔ راشد [۲۰۰۰سی]). برگرن [۱۹۹۸] دو روش قرن چهارمی/دهمی برای رسم دوایر سمت بر اسطرلاب عرضه کرده است (که برای یافتن جهت قبله مفید هستند)، نخستین روش از کوهی و دومین روش از ابومحمود نَسَفی است. همچنین معاصر با این متون، نامهٔ ابونصر منصوربن عراق دربارهٔ این موضوع به بیرونی است که شامل اثبات این مسئله است که خطوط ساعت‌های مُعوَجّه بر ساعت‌های آفتابی مستقیم نیستند و نیز منحنی ساعت‌ها بر اسطرلاب‌ها به‌طور کلی دایره نیستند- [این یعنی] پیشرفتی نسبت به رهیافت صاغانی [هوخندایک، ۲۰۰۱آ]. سرانجام [لورچ، ۲۰۰۰آ] رساله‌ای از ابن صلاح [همدانی یا ابن سری] مربوط به قرن ششم/دوازدهم عرضه کرد که ردّی از شرح مسلمة بر تسطیح بسیط الکره از بطلمیوس در آن دیده می‌شود.

تصویر گنج‌نگاشتی تنها ابزار نمایش کره بر صفحهٔ صاف نبود. کِندی، کونیچ و لورچ [۱۹۹۹] مجموعه‌ای از متون دربارهٔ «اسطرلاب مُبَطَّخ» (اسطرلاب خربزه‌ای شکل) را منتشر کرده‌اند. در این ابزار از نگاشت «سمتی متساوی المسافت» استفاده شده است، که قابل درک‌تر از تصویر گنج‌نگاشتی است اما به جای دایره، منحنی‌های خربزه‌ای شکل بر صفحهٔ ابزار رسم می‌کند- که ساخت آن بر روی صفحهٔ برنجی برای ابزارسازان سخت‌تر است (هرچند چنانکه خواهیم دید، غیر ممکن نیست). یک کشف شگفت‌آور دیگر، دو نقشهٔ جهان طراحی شده در ایران قرن یازدهم/هفدهم است، که کینگ [۱۹۹۷] از وجود آن خبر داده و در یک مجلد مصوّر بزرگ [کینگ، ۱۹۹۹ب] منتشر شده است. این ابزارها مکه را در مرکز نقشه قرار داده‌اند و نگاشت جهان شناخته‌شده بر این ابزار، جهت و فاصلهٔ نسبت به مکه را برای تمامی شهرها به‌دقت حفظ می‌کند. کینگ این فرضیه را مطرح می‌کند که نظریهٔ مبنایی این نقشه‌ها ریشه در قرن سوم/نهم، در رسالهٔ حبش حاسب دارد.

جغرافیا و ریاضیات تعاملات ثمربخش بسیاری داشتند که در مجموعهٔ سه جلدی سزگین دربارهٔ جغرافیای دورهٔ اسلامی، در قالب جلدهای دهم، یازدهم و دوازدهم مجموعهٔ تاریخ نگارش‌های عربی او [سزگین ۲۰۰۰آ، بی، سی] چاپ شده است. جلد نخست، به‌طور ویژه در تعامل با ریاضیات است؛ این جلد شامل مطالبی در این باره است که کار نقشه‌کشان قرن سوم/نهم که از تصویر گنج‌نگاشتی کرهٔ آسمان استفاده می‌کردند، بعداً با اخلاف نالایقشان تباه شد. سزگین همچنین استدلال می‌کند که تأثیر دورهٔ اسلامی بر جغرافیای اروپا تا قرن هجدهم میلادی ادامه یافت.

اقتضائات دینی: اسلام احتمالاً تنها دینی است که مثلثات و نجوم کروی را برای برگزاری برخی مراسم مذهبی خود به کار می‌گیرد. این گفته به‌ویژه دربارهٔ تعیین جهت مکـه (قبلـه)، زمـان نمازهـا (که با ارتفاع خورشید تعیین می‌شود)، و آغاز ماه مبارک رمضان (که بر اساس موقعیـت خورشـید و ماه تعریف می‌شود) صادق است. پیش از این، نقشه‌های جهانی مهمی را که توسـط کینـگ کشـف شده‌اند و به مخاطب این امکان را می‌دهند تا قبلـه را به‌سـرعت پیـدا کنـد شـرح دادیـم، امـا بیشـتر تلاش‌ها برای تعیین قبله مستلزم به‌کارگیری مثلثات کروی اسـت. هوخنـدایک [۲۰۰۰آ] تصـحیح، ترجمهٔ انگلیسی و شرح روش نیریزی برای تعیین سمت قبله در بغداد با استفاده از پیش‌نیاز معروفی به نام «روش زیج‌ها» را چاپ کرده است. قدمت این متن به حدود ۹۰۰ میلادی (قرن سوم هجری) می‌رسد که آن را به کهن‌ترین محاسبهٔ ریاضی دقیقی که در دست داریم تبدیل می‌کند. متأسـفانه بـه هم ریختگی عددی روش ایـن محاسـبات (ص ۱۱۸ مقالـهٔ انگلیسـی، خـط ۲-۳)، آن را در عمـل بسیار بی‌دقت و غیرقابل استفاده کرده است. موسی [۲۰۱۱] تحلیل ریاضی مفصلی از تعیین سـمت قبله در مجسطی ابوالوفا، که حدود یک قرن دیرتر نوشته شده، آماده کرده است که شامل جدول‌های مثلثاتی و توضیحی دربارهٔ ابزارهای رصدی مورد استفاده می‌شـود. ریـوس [۲۰۰۰] مجلـدی را در بررسی تنوع نسخه‌های خطی مربوط به قبله از اندلس و مغرب، شـامل بحـث دربـارهٔ راه حـل‌هـای ریاضی و ملاحظات عملی‌تر تعیین قبله در زندگی روزمره منتشر کرده اسـت (همچنـین بنگریـد بـه ریوس [۱۹۹۶]، و ریوس و کومِس [۲۰۰۶]). او رساله‌های نوشته شـده از قـرن ششـم/دوازدهـم تـا دوازدهم/هجـدهم را پوشـش داده، و کتـاب القبلـه اثـر دانشـمند بربـر قـرن هشـتم/چهاردهم، المصمودی، را تصحیح و به اسپانیایی ترجمه کرده است. واکنش فقها به رهیافت‌های ریاضی تعیین قبله، که همیشه مثبت نبوده، در کتاب دلال [۲۰۱۰، ص ۳-۹] بررسی شده است.

[مسئلهٔ تعیین] قبله فقط آغاز رابطهٔ بین نجوم و آیین‌های مذهبی بوده است. مطالعهٔ زمان‌سـنجی با استفاده از خورشید و ستارگان، که برای تعیین زمان نمازهای روزانه مورد نیاز بود، تاریخی غنـی و چندوجهی از آغاز قرن دوم/هشتم به وجود آورد. این شاخهٔ علمی توسط کینگ، که مطالعات قبلـی او دربارهٔ این موضوع در دو جلد شامل حدود ۲۰۰۰ صفحه با عنوان همگام با افلاک: مطالعاتی در زمان‌سنجی و ابزارسازی نجومی در دورهٔ اسلامی پوشش داده شده و گسترش یافته است، مورد توجه دوباره قرار گرفت. نخستین جلد (بانگ مؤذن [کینگ، ۲۰۰۴])، بر متون و جـدول‌هـای مربـوط بـه زمان نمازها تأکید دارد، که از جنبه‌های ریاضی فراتر می‌رود و به موضوع‌هایی چون معماری و نقش مؤذن و موقِّت می‌پردازد. مطالعات جلـد دوم (ابزارهـای تعیـین اوقـات شـرعی [کینـگ، ۲۰۰۵]) به‌طور ویژه با ابزارهای ریاضی و نجومیِ ساخته شده برای زمان‌سنجی سر و کار دارد.

آخرین کاربرد نجوم ریاضی در اعمال مذهبی، گاهشماری طبیعی است. رؤیت هلال ماه نو بر آغاز ماه در تقویم قمری دلالت می‌کند، و این مسئله در مورد ماه رمضان بسیار مهم بوده است. گیاهی یزدی [۲۰۰۹] پژوهش مفصلی دربارهٔ جدول‌های ریاضی خازنی برای تعیین رؤیت هلال منتشر کرده است.

جدول‌های نجوم ریاضی: تقریباً تمامی منابع اولیه دربارهٔ جدول‌های نجومی تعریف شده به صورت ریاضی، مطالعه شده‌اند. حدود ۲۵۰ زیج (دست‌نامه‌های نجومی شامل جدول‌هایی که به خواننده امکان می‌دهند کمیت‌های نجومی را محاسبه کند) در این منابع شناخته شده‌اند، و هر زیج شامل بیست تا چند صد جدول می‌شود. یک سنّتِ رو به پیشرفت حساب، مثلثات، و جدول‌های نجومی مرتبط با سنت زیج نویسی نیز وجود دارد. کوششی متقدم برای عرضهٔ نقشه‌ای از این حوزهٔ گسترده، پژوهشی در زیج‌های دورهٔ اسلامی کِنِدی در سال ۱۹۵۶ است. در سال ۲۰۰۱کینگ و سامسو، با همکاری گلدشتاین، ضمیمه‌ای بر پژوهش اصیل کندی منتشر کردند [کینگ و سامسو، ۲۰۰۱]. این مقاله که از پژوهش اصلی طولانی‌تر است، شامل بخش‌هایی دربارهٔ سنت ساخت الگوهای سیاره‌ای غیر بطلمیوسی و جدول‌هایی مرتبط با سنت زیج نویسی است. ون دالن در حال کار بر روی پژوهشی جامع دربارهٔ زیج‌هاست که پیش‌بینی می‌شود جایگزین هر دو اثر قبلی شود. بخشی از پژوهش او، آثار نجومی جدید و نامتعارفی را شامل نسخهٔ خطی جدیدی از زیج ممتحن [ون دالن، ۲۰۰۴آ] و زیج ناصری با ارتباطات هندی [ون دالن، ۲۰۰۴ب]معرفی کرده است.

زیج خاقانی تألیف دانشمند ایرانی قرن نهم/پانزدهم، جمشید کاشانی، به دلیل اشتمال بر عبارات مفصلی که نوآوری‌هایش در جدول‌ها را توضیح می‌دهند، یکی از جالب‌ترین زیج‌هاست. در سال ۱۹۹۸ کندی مجلدی مختصر [کندی، ۱۹۹۸] شامل جدولی مفصل از محتوای این زیج منتشر کرد. این کتاب باید پژوهشگران آینده را در تحلیل این متن یاری کند. دو مقاله دربارهٔ موضوع‌های موجود در این زیج به‌تازگی چاپ شده‌اند: کندی [۱۹۹۵] روش کاشانی برای تعیین طالع در احکام نجوم را (که در پایین مورد بحث قرار گرفته‌اند) توضیح می‌دهد، در حالی که ون بروملن [۲۰۰۶] گزارشی از استفادهٔ کاشانی از فلک تدویر برای محاسبهٔ موقعیت‌های سیارات سفلی می‌دهد (که در ادامه بحث شده است).

اعداد ثبت‌شده در جدول‌های نجومی اغلب می‌توانند برای دریافت اطلاعات تاریخی دربارهٔ منشأ آن‌ها تحلیل شوند. یک نمونه، اثر ون دالن [۱۹۹۶] است، که تعدیل زمان را در ترجمهٔ لاتینی تحریر مجریطی از زیج سندهند خوارزمی تحلیل کرده است. ون دالن یک روش تحلیلی کلی به کار برده است که آن را در سال ۱۹۸۹ برای تعیین اینکه بیشتر پارامترهای ثبت شده در خانه‌های جدول‌ها منشأ بطلمیوسی دارند، با اشاره به اینکه خود جدول یا پارامترهای آن راهشان را به طریقی

از شرق به غرب عالم اسلام یافته‌اند، مطرح کرد. برای روش‌های محاسباتی دیگری که بـرای کسـب اطلاعات تـاریخی از جـدول‌هـا اسـتفاده شـده اسـت، بنگریـد بـه مقالـۀ میئِلگـو [۱۹۹۶] دربـارۀ جدول‌های حرکت میانگین و مقالۀ ون بروملن [۱۹۹۷] دربارۀ وابستگی جدول‌ها به یکدیگر.

شارت [۱۹۹۸] وظیفۀ تحلیل آنچه را که شاید بزرگ‌ترین جدولی باشد که دستی تنظیم شده، بـر عهده گرفته است: جدولی شامل چهارصد هزار عدد تألیف مـنجم قـاهره، نجـم‌الـدین مصـری، در حدود ۱۳۰۰ میلادی (حدود هفتصد هجری). هرچند هدف اصلی این جدول ارزشـمند، محاسـبۀ ارتفاع اجرام سماوی و زمان‌سنجی خورشیدی بوده است، بـرای حـل تقریبـاً تمـامی مسـائل نجـوم کروی با طرح دوبارۀ تعریف شناسه‌های جدول نیز می‌تواند به کار رود – به‌شرط اینکه خواننده برای درگیر شدن با چنین جدول حجیمی صبور باشد.

پیش‌بینی طول دایرةالبروجی سیاره‌ها مبحث اصلی بیشتر زیج‌ها بود، و روش‌های گونـاگون برای جدول‌بندی آن‌هـا وجـود داشـت. طـول دایرةالبروجـی نخسـت بـا تعیـین یـک «حرکـت میانگین» (مکان متوسطی که اگر فرض کنیم سیاره با سـرعت ثابـت حرکـت می‌کنـد بـه آنجـا می‌رسد) محاسبه می‌شود. بعد بـه اقتضـای هندسـۀ الگـوی بطلمیوسـی، بـه خـاطر تغییـرات سرعت، دو «تعدیل» به این محاسبات افزوده یا از آن‌ها کم می‌شود. سامسو و میلیاس [۱۹۹۸] اثر منجم اندلسی ۱۳۰۰ میلادی (قرن هفتم و هشتم هجری)، ابن بنا مراکشی را عرضه کرده‌اند که عمل «جابجایی» در جدول‌بندی تعدیل‌ها- یعنی اضافه کـردن یـک مقـدار ثابـت به‌انـدازۀ کافی بزرگ به تعدیل برای مثبت شـدن مقـدار آن، و کـم کـردن آن مقـدار ثابـت از تعـدیل- را اقتباس کرده است. این محاسبه، با حذف منشأ اصلی بالقوۀ خطاها، خواننده را از تصمیم‌گیری دربارۀ افزودن یا کاستن تعدیل معاف می‌کند. منجم اواخر قرن چهارم/دهم، کوشـیار بـن لبـان همین فرایند را در زیج جامع خود به کار برده است، و علاوه بر آن یکی از تعدیل‌ها را به روشی مبتکرانه چنان جدول‌بندی کرده است که بار محاسباتی آن را نسبت به روش معمول بطلمیوسی کم می‌کند [ون بروملن، ۱۹۹۸].[۱] سرانجام دورس [۲۰۰۲] تاج الازیاج، تألیف منجم اندلسی و مغربی قرن هفتمی/سیزدهم، محـی‌الـدین مغربـی، را بـا عطـف توجـه بـه اینکـه برخـی از جدول‌های تعدیل سیاره‌ای او «متجانس» است - بـه ایـن معنـی کـه آن‌هـا در واقـع بـا ضـرب مقادیری ثابت در عددهای جدول‌های دیگر محاسـبه شـده‌انـد- چـاپ کـرده اسـت. ون دالـن پژوهش بسیار مفیدی دربارۀ رهیافت‌های ریاضـیات دورۀ اسـلامی [ون دالـن، ۱۹۹۹]، ماننـد

۱. متن عربی مقاله‌های اول و چهارم زیج جامع کوشیار به همراه ترجمه و شرح انگلیسی آن‌ها را محمد باقری منتشر کرده است (فرانکفورت، ۲۰۰۹).-م

پژوهشی که دربارهٔ جدول‌بندی عرض‌های سیارات انجام شده، در قالب بخشی از پژوهشش دربارهٔ مستندات نجومی چینی تألیف کرده است.

ابزارها: ساختار ابزارهای ریاضی برای حل مسائل نجومی به آغاز علوم دورهٔ اسلامی برمی‌گردد. این مطلب با مجموعه‌ای از یازده رسالهٔ کوتاه در دو نسخهٔ خطی دربارهٔ اسطرلاب و ابزارهای دیگری از اوایل قرن سوم/نهم (که دو مورد از آن‌ها به خوارزمی منسوب هستند) توسط شارت و اشمیدل [۲۰۰۴] به‌صورت تصویری توضیح داده شده، تصحیح و به انگلیسی ترجمه شده است. شارت و اشمیدل [۲۰۰۱] همچنین متنی را در توضیح ابزاری متأخرتر و نسبتاً پیچیده‌تر مربوط به قرن سوم/نهم، که با چندین ربع سینوسی و مقیاس‌های مثلثاتی کامل شده، مطالعه کرده‌اند و آن را به حبش حاسب نسبت داده‌اند؛ آن‌ها احتمال می‌دهند که این ابزار برای یافتن ارتفاع خورشید به کار می‌رفته است. هرچند دایره‌ها و خط‌های راست، قالب‌های هندسی سازندهٔ بیشتر ابزارها بودند، این نکته در مورد ابزار زمان‌سنجی خورشیدی نسطولوس در ۹۰۰ میلادی [کینگ، ۲۰۰۸] صادق نیست. منحنی‌های پیچیدهٔ ریاضیاتی این ابزار منحصر به فرد، با دقت ریاضی بر صفحهٔ آن رسم می‌شود. رساله‌ای از ابراهیم بن سنان دربارهٔ ساعت‌های آفتابی، موضوع پایان‌نامهٔ دکتری لوکی در ۱۹۴۱ بوده است؛ این رساله نخستین بار همراه با تصحیح هوخندایک از متن عربی آن در کتاب لوکی [۱۹۹۹] چاپ شد. به نظر می‌رسد رسالهٔ سنان شامل اثبات این مطلب است که خط‌های ساعت بر صفحهٔ ساعت آفتابی مستقیم نیستند، اما نسخهٔ خطی پیش از این اثبات تمام می‌شود؛ اظهارات ابن هیثم در متنی دیگر (که توسط راشد [۲۰۰۶] تصحیح و به فرانسوی ترجمه شده است) توضیح می‌دهد که اثبات سنان کامل نیست (همچنین بنگرید به ترجمهٔ فرانسوی متن سنان، چاپ شده توسط راشد و بلوستا [۲۰۰۰]). سرانجام نویسندهٔ جدول نجومی چهارصد هزار خانه‌ای حجیمی که قبلاً دربارهٔ آن بحث کردیم، نجم‌الدین مصری، اثری با نام کتاب فی الآلات الفلکیة نوشته است. این اثر که ساختار بیش از صد ابزار، شامل اسطرلاب، ربع، ساعت آفتابی، و ابزارهای مثلثاتی را توضیح داده است، در کتاب شارت [۲۰۰۳] تصحیح و به انگلیسی ترجمه شده است.

ریاضیات و احکام نجوم: محو کردن مرز بین نجوم و احکام نجوم دورهٔ اسلامی، با این واقعیت هویداست که تمامی مؤلفان دورهٔ اسلامی که در اینجا به آن‌ها اشاره خواهیم کرد، نامشان قبلاً در جایجای این بررسی آمده است. این فرض که احکام نجوم از لحاظ ریاضی ضعیف بوده اشتباه است. بسیاری از کمیت‌های مورد نیاز برای انجام کارهای احکامی، سخت‌ترین مسئله‌های مثلثات کروی را به وجود می‌آورد. درگذشت غم‌انگیز ای. اس. کِنِدی ضربهٔ بزرگی به این حوزه زد،

اما چند پژوهش جدید دربارهٔ متونی ویژه در این زمینه، کمک می‌کند تا به پژوهشگران نشان داده شود که چه آثاری در دسترس است. اثر کندی [۱۹۹۶] نقطهٔ آغاز خوبی برای مطالعهٔ مسئلهٔ تقسیم دایرةالبروج به دوازده «بیت» احکام نجومی است، که به اقتضای زمان و مکان تفاوت می‌کنند. کندی دربارهٔ نُه راه حل ریاضی در مرورش بر ۲۸ نسخهٔ خطی بحث می‌کند که شامل دو روش می‌شود که در زایچه‌ها در تاریخ تألیف نورث نبوده‌اند. پاسخ نورث به مقالهٔ کندی در همان جلد [نورث ۱۹۹۶] متوجه این مطلب است که این مسئله با تأخیر کافی در تاریخ احکام نجوم، در حدود قرن پنجم میلادی، مطرح شد. منجم اندلسی قرن پنجم/یازدهم، ابن معاذ جیّانی، که به دلیل انتقال انقلاب مثلثات کروی از شرق جهان اسلام به اسپانیا شناخته شده است، در رساله‌اش با عنوان فی مطارح شعاعات دربارهٔ بیت‌های احکام نجومی و ناظرهای احکام نجومی (بخش‌هایی از دایرةالبروج بر اساس «شعاعات» سیاره‌ها) بحث کرده است. هوخندایک [۲۰۰۵] گزارش، تصحیح و ترجمهٔ انگلیسی بخش‌های مناسبی از این رساله و نیز رسالهٔ لاتینی زیج جیّان[1] را، با عطف توجه به تأثیر بر رگیومونتانوس، منتشر کرده است؛ کزولراس [۲۰۱۰] پس از آن، کل رسالهٔ ابن معاذ را به اسپانیایی ترجمه و منتشر کرد (برای مروری کلی بر احکام نجوم ریاضی در غرب تمدن اسلامی بنگرید به کزولراس [۲۰۰۸]). کندی [۱۹۹۵] گزارش جمشید کاشانی دربارهٔ تعیین طالع (نقطه‌ای از دایرةالبروج بر افق شرقی در یک لحظهٔ مفروض) در زیج خاقانی را توضیح داده است. کاشانی پانزده روش عرضه می‌کند که برخی از آن‌ها مثلثات کروی نسبتاً پیچیده‌ای را به کار گرفته‌اند. یافتن پژوهش‌های کامل و جامع دربارهٔ متون احکام نجوم ریاضی سخت است؛ یک استثناء برجسته مقالهٔ کندی [۲۰۰۹] دربارهٔ تاریخ احکام نجومی بیرونی است، که پس از درگذشت کندی توسط همکاران و شاگردان سابقش تکمیل شد.

مسائل دیگر: مسائل نجومی با محتوای ریاضی اساسی که در دسته‌بندی‌های بالا نیامده‌اند، شامل موارد زیر هستند:

- کتاب راشد [۲۰۰۶] شامل تصحیح و ترجمهٔ فرانسوی پنج رساله در نجوم ریاضی از ابن هیثم است. یکی از این رساله‌ها اثری است که در بالا به آن اشاره شد و اثبات ابراهیم بن سنان را مبنی بر اینکه خط‌های ساعت آفتابی راست نیستند تکمیل کرده است. بزرگ‌ترین رساله در میان این پنج اثر، که به‌مراتب حجیم‌تر از بقیه است (دربارهٔ آن همچنین بنگرید به شرح راشد در [راشد، ۲۰۰۷ب]) رساله‌ای ریاضی دربارهٔ تأثیرات (بسیار کم) حرکت سیاره‌ها نسبت به زمینهٔ ستارگان ثابت، بر چرخش روزانهٔ آن‌ها در فلک سماوی است. بقیهٔ

1. Tabulae Jahen

رساله‌ها شامل قول فی برکار الدوائر العظام، و دو رسالهٔ کوتاه دربارهٔ ارتفاع ستارهٔ ثابتی بالای افق و ساعت‌های آفتابی افقی است.

- به نظر می‌رسد سنت کوچکی در مورد مسئلهٔ تعیین زاویهٔ شیب نسبت به افق وقتی صفحهٔ ناظر دارای ارتفاع باشد، وجود داشته است. راشد تصحیح عربی، ترجمهٔ انگلیسی [راشد، ۲۰۰۱] و ترجمهٔ فرانسوی [راشد، ۲۰۰۲آ] رسالة فی ما یری من السماء و البحر تألیف هندسه‌دان قرن چهارم/دهم، ابوسهل کوهی را منتشر کرده، و برگرن و ون بروملن [۲۰۰۳] انتقاد مورد تردید سمؤال از روش کوهی در کشف عوار المنجمین او را بررسی کرده‌اند. یک رسالهٔ متأخرتر دربارهٔ همین موضوع، منسوب به متفکر و شاعر قرن هفتم/سیزدهم، بابا افضل‌الدین کاشی، توسط باقری به منجم معروف قرن نهم/پانزدهم، جمشید کاشی، منسوب شده است [باقری، ۲۰۰۲].
- کوهی همچنین رساله‌ای دربارهٔ روشی برای یافتن فاصلهٔ شهاب‌ها نوشته است. کوهی روش هندسی تحلیل توسط معلوم‌ها را به کار برده، اما به نظر می‌رسد محاسبات واقعی را انجام نداده است. بنگرید به تصحیح‌های عربی و ترجمه‌های انگلیسی این رساله در آثار برگرن و ون بروملن [۲۰۰۱ب] و راشد [۲۰۰۱]، و یک ترجمهٔ فرانسوی در کتاب راشد [۲۰۰۲آ].

حساب

در بادی امر، حساب در جایگاه یک موضوع نسبتاً پیش پا افتاده، به تاریخ‌نگار ریاضیات دورهٔ اسلامی منبعی سرشار از اطلاعات دربارهٔ هر دو زمینهٔ انتقال مفاهیم ریاضی و روش‌های پیچیدهٔ جالبی که مؤلفان قدیم ابداع کرده‌اند عرضه می‌کند.

به‌کارگیری و انتقال نظام عددی: نظام عددی رایج کنونی ریشهٔ هندی دارد و از طریق مسیری نسبتاً پیچیده که از جهان اسلام گذشته به ما رسیده است. این نظام و روش‌های همراه آن، راه خود را نخست در قرن دوم/هشتم، به شرق جهان اسلام پیدا کردند، و کتاب حساب خوارزمی نقشی مهم در این جریان داشته است. مطالعهٔ انتقال این نظام به غرب جهان اسلام و به وجود آمدن شکل جدیدی از اعداد که در این سیر رخ داده است، دچار فقدان شاهد نسخه‌های خطی، به‌ویژه بین قرن چهارم/دهم و هفتم/سیزدهم است. فولکرتس با کشف نسخهٔ خطی جدیدی از یک بازنویسی لاتینی اسپانیایی مربوط به قرن ششم/دوازدهم از متن رسالهٔ خوارزمی به بررسی انتقال منابع لاتینی کمک کرد (این نسخه، که نخستین نسخه‌ایست که متن کامل رساله را در برمی‌گیرد، وجودش توسط فولکرتس [۱۹۹۸] اعلام شده، رئوس مطالبش توسط وی بیان شده [فولکرتس، ۲۰۰۱]، و

تصحیح و به آلمانی ترجمه شـده اسـت [فـولکرتس،۱۹۹۷].[1] دو مقالـه از پـاول کـونیچ (کـونیچ [۲۰۰۳ب] به انگلیسی؛ کونیچ [۲۰۰۵] به آلمانی) تحلیل‌های مفصلی دربارهٔ وضـعیت پـژوهش دربارهٔ فرایند کامل انتقال عددنویسی هندی- عربی فراهم کرده اسـت. همچنـین بنگریـد بـه برگـرن [۲۰۰۲آ] که رسیدن اعداد عربی به اروپا، و نقـش نجـوم و کـاربرد کسـرهای شصـتگانی (در پایـهٔ شصت)، را بررسی کرده است. کاربرد همزمان نظام‌های عددی چندگانه معمول بـود؛ بـرای بحـث دربارهٔ رساله‌ای از ابن بنّا دربارهٔ اعداد رومی، یکی از پنج نظامی که در زمان امپراتـوری عثمـانی در مغرب رایج بود، بنگرید به مقالهٔ گرگور [۲۰۰۰].

اعداد در عمل: شماری از متون مربوط به انجام عملیات حسابی را می‌توان در منابعی که برای مخاطبان مختلف نوشته شده‌اند، یافت. این منابع را مؤلفان مختلف نوشته‌اند. البته برخی از آن‌هـا، مانند متنی مربوط به قرن ششم/دوازدهم تألیف ابوبکر حصّار، شناخته شده نیسـتند؛ نسـخهٔ خطـی جدیدی از این رساله توسط کونیچ [۲۰۰۳آ] معرفی شده است. برخی از این مؤلفان به‌طور ویژه بـه خاطر رساله‌هایشان در حساب شناخته شده‌اند، مانند مؤلف اندلسی و مراکشی قـرن نهم/پـانزدهم، قلصادی، که سِیر فکری کهن او توسط مـارین [۲۰۰۴] توضـیح داده شـده اسـت. بقیـهٔ مؤلفـان از راهگشایان ریاضیات دورهٔ اسلامی بودند، از جمله ریاضـی‌دان ایرانـی قـرن نهم/پـانزدهم، جمشـید کاشانی، که مفتاح الحساب او، از جمله روش یافتن بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشـترک و کوچـک‌ترین مضرب مشترک و روش محاسبهٔ n-امین ریشهٔ اعـداد را بیـان کـرده اسـت. ایـن اثـر توسـط آذریـان [۲۰۰۰] خلاصه شده است. یوهانسون [۲۰۱۱] فرایندهای مختلف محاسبهٔ ریشـهٔ سـوم اعـداد در دورهٔ اسلامی را مورد توجه قرار داده است که نظریهٔ ارتباط بین ایران و چین را تأیید مـی‌کنـد. برگـرن [۱۹۹۵] حساب انگشـتی را بـا بـه کـاربردن رسـاله‌ای از بغـدادی توضـیح داده اسـت کـه در آن از کسرهای با مقسوم علیه بزرگتر از ده اجتناب شده است. گاهی می‌توان ریاضیات محض جدید را در این آثار یافت؛ یک شرح قرن هشتمی/چهاردهمی بر یک رسالهٔ یمنی قـرن چهـارمی/دهمی دربـارهٔ محاسبات کـاربردی تـألیف صـردفی شـامل روشـی تکرارشـونده بـرای تعیـین جـذر اعـداد اسـت [ربستاک، ۱۹۹۹].

به هر حال، بخش عمده‌ای از فن حساب به‌سوی اهداف کاربردی (نسبت به اهـداف پژوهشـی) رانده شد و بیشتر رساله‌های حسـاب دورهٔ اسـلامی بـر اسـاس مذاقـه‌هـای پژوهشـگرانهٔ اخیـر، بـر کاربردهایشـان تأکیـد داشـته‌انـد. ایـن کاربردهـا بـه‌طور ویـژه شـامل انـدازه‌گیـری، مخصوصـاً

۱. ترجمهٔ فارسی خلاصهٔ انگلیسی فولکرتس در کتابش [۱۹۹۷] با عنوان «نسخهٔ نویافتهٔ ترجمهٔ لاتینی رسالهٔ حساب خوارزمی» به‌وسیلهٔ جمیل بصّام در نشریهٔ تاریخ علم، شمارهٔ ۹، سال ۱۳۸۹، ص ۱۳۲-۱۶۳ منتشر شده است. ـم

اندازه‌گیری‌های اوزان و مقادیر هستند. (در این زمینه، همچنین بنگرید به بخش اندازه‌گیری در هندسه،که پیشتر آمد). ربستاک [۱۹۹۵] تصحیحی از المعاملات فی الحساب، رساله‌ای از ابن هیثم ویژهٔ کاربردهای محاسبه در تجارت، منتشر کرده است. دیگر رساله‌های حساب که به کاربرد حساب پرداخته‌اند به شرح زیرند:

- کتاب الحاوی للأعمال السلطانیة ورسوم الحساب الدیوانیة، اثری مربوط به قرن ششم/دوازدهم تألیف یکی از شاگردان شقّاق [ربستاک، ۲۰۰۲/۰۳]؛
- غرائب الحساب وعجائب الحُسّاب (به زبان فارسی) تألیف شاعر قرن پنجم/یازدهم، ناصر خسرو، شامل مسائل تبدیل واحدهای پول که نیازمند حل معادلات خطی نامعین است [باقری، ۱۹۹۷آ]؛
- اثر فارسی دیگری از قرن دهم/شانزدهم تألیف قاسم بن یوسف ابونصر، که شامل تعیین مساحت زمین است (بنگرید به خلاصهٔ بخش مربوط به ضرب در مقالهٔ کِنِدی [۲۰۰۰]).

کاربرد مکرری از حساب، تخصیص درست دارایی بین مدعیان بر حسب قانون ارث است. ربستاک [۲۰۰۸/۰۹] تاریخ این موضوع را با بیان هر دو سنت منطقی و حسابی دنبال کرده است. آثار حسابیِ شامل مسائل ارث که به‌تازگی مورد بررسی قرار گرفته‌اند عبارت‌اند از متن قرن چهارمی/دهمی [ابوعلی] حُبوبی از خوارزم، که در آن از روش‌هایی استفاده کرده که به جبر و حتی هندسه نیز رسوخ کرده است [لابید، ۱۹۹۸]؛ و اثری تألیف قُرَشی، ریاضیدان دمشقی قرن پنجم/یازدهم (که ربستاک [۲۰۰۲آ] آن را توضیح داده و [۲۰۰۱] به آلمانی ترجمه کرده است).

سرگرمی‌های ریاضی؛ مربع‌های وفقی: هر سنت ریاضی مسائلی با هدف سرگرمی، مانند آنچه در مفتاح المعاملات محمد بن ایوب طبری (که در مقالهٔ باقری [۱۹۹۹] مرور شده است) آمده، طرح می‌کند. پژوهش دربارهٔ ریاضیات تفریحی دورهٔ اسلامی در پانزده سال گذشته (و پیش از آن) تحت تأثیر مطالعات مداوم ژاک سزیانو دربارهٔ مربعات وفقی بود. هرچند مربعات وفقی احتمالاً پیشتر نیز وجود داشتند، مطالعهٔ جدی دربارهٔ ویژگی‌های آن‌ها و روش‌های تولید آن‌ها در اوایل دورهٔ اسلامی آغاز شد. می‌دانیم که علاقه به این موضوع در آغاز قرن سوم/نهم آغاز شد؛ کهن‌ترین رساله‌ها در این زمینه مربوط به قرن چهارم/دهم هستند. کتاب سزیانو [۲۰۰۴آ] مروری است که با دو متن از این متون کهن آغاز می‌شود و افزایش پیچیدگی این متون در طول قرن‌ها را با تصویر شرح می‌دهد، و سرانجام به ساختار مربع‌های وفقی با ابعاد مختلف و تحت شرایط گوناگون می‌رسد. یک مربع وفقی خاص در رساله‌ای مربوط به قرن چهارم/دهم تألیف انطاکی [سزیانو،

۲۰۰۳سی] شایستهٔ نام «کوادراتوس میرابیلیس»[1] است؛ این مربع، یک مربع «مرزدار» (به این معنی که اگر کسی خانه‌های واقع در مرز بیرونی را حذف کند، مربع وفقی همچنان باقی می‌ماند، و دوباره می‌توان همین کار را دربارهٔ مربع جدید انجام داد، و به همین ترتیب دربارهٔ مربع‌های بعدی) با شروط ویژه‌ای دربارهٔ اعداد زوج و فرد است. اثر کهن دیگر رسالة فی ترکیب عدد الوفق فی المربعات از ابوالوفا است، که به مربع‌های مرزدار و روش‌های دیگر ساخت آن‌ها نیز می‌پردازد (این رساله را سزیانو بررسی [۲۰۰۳سی] و تصحیح [۱۹۹۸ب] کرده است). سزیانو دربارهٔ چندین رساله از مؤلفان ناشناخته دربارهٔ مربع‌های وفقی بحث کرده است: دو متن احتمالاً از قرن پنجم/یازدهم، با عنوان‌های کتاب ترکیب العدد الوفق [سزیانو، ۱۹۹۶سی] و تلخیص فی العدد الوفق [سزیانو، ۱۹۹۶آ]؛ و رساله‌ای از اواخر قرن ششم/دوازدهم که همچنین شامل مطالبی دربارهٔ اعداد کامل و متحاب است [سزیانو، ۲۰۰۳آ]. ساختارهای گونه‌های خاصی از مربع‌های وفقی توسط سزیانو [۱۹۹۸آ] (دربارهٔ مربع‌های وفقی ساده) و [سزیانو، ۲۰۰۳ب] (دربارهٔ مربع‌هایی که با استفاده از حرکت‌های مهره‌های شطرنج، به‌ویژه اسب ساخته شده‌اند) مرور شده است. هرچند مربع‌های وفقی مورد علاقهٔ ریاضیدانان بودند، چنانکه در متنی لاتینی (که اصل آن عربی بوده) با مثال توضیح داده شده است، پس از قرن ششم/دوازدهم از آن‌ها به‌عنوان طلسم استفاده می‌شد. سزیانو [۲۰۰۴ب] این متن لاتینی را همراه با ترجمه چاپ کرده است. دو مطالعهٔ منطقه‌ای نیز در این باره انجام شده است: پژوهش سزیانو [۲۰۰۴سی] دربارهٔ مربع‌های وفقی در ایران، و پژوهش کومس [۲۰۰۹] دربارهٔ مربع‌های وفقی در اندلس (به‌ویژه رساله‌ای از زرقالی).

جبر

زبان جبر: مفاهیم جبر جدید به همان اندازه که قوی هستند، مفروضات و شیوه‌هایی از تفکر را در برمی‌گیرند که هنگام بیان ریاضیات تاریخی می‌توانند آن را به تأثیری مخرب تبدیل کنند. اکنون پی می‌بریم که وقتی کسی به معانی واژه‌ها و نمادهای جبری توجه می‌کند، به‌ویژه وقتی فرهنگ‌های پیش از دورهٔ جدید را مطالعه می‌کند، چقدر باید احتیاط کند. شماری از مطالعات (به رهبری اوکس) متوجه این مطالب در دورهٔ اسلامی است. معمولاً چنین فرض شده است که واژه‌هایی مانند «الجبر» («جبران کردن») فنی بوده و معانی ویژهٔ ریاضی داشته‌اند، اما اوکس و الخطیب [۲۰۰۷] به این نکته توجه کرده‌اند که نسخه‌های خطی جبری قرن سوم/نهم هنوز این واژه‌ها را در معنایی غیر فنی به کار برده‌اند. مثلاً واژهٔ «مال» می‌توانست در سطوح مختلف یک مسئله، معانی مختلف بپذیرد: «کمیت» اگر در

۱. این عنوانی است که سزیانو به پیچیده‌ترین حالت مربع‌های وفقی دورهٔ اسلامی داده است.- م

شرح مسئله استفاده شده باشد، و «مجذور» اگر در حل مسئله آمده باشد [اوکس و الخطیب، ۲۰۰۵]. وقتی ما عبارت‌های چند جمله‌ای مانند ۳x+۴ را می‌بینیم، فکر می‌کنیم ۳x و ۴ به هم اضافه شده‌اند، اما این عبارت در عربی به‌صورت مجموعه‌ای از هفت چیز تفسیر می‌شد [اوکس، ۲۰۰۹]. تمایزات دقیق‌تر، مانند تفاوت معانی جبری مختلف که ما آن‌ها را تحت علامت یکسان = رده‌بندی می‌کنیم، نیز مورد توجه بوده است [اوکس، ۲۰۰۹]. در واقع جبر به خودی خود ارتباطی متفاوت با هندسه، نسبت به ارتباطی که امروزه با آن دارد، داشته است: مادامی که هندسه زبان بیان نظریه‌ها بود، جبر به یک زبان مصنوعی حل مسئله منحصر شده بود [اوکس، ۲۰۰۷]. در بیشتر موارد، جبر دورهٔ اسلامی «لفظی» بود (با الفاظ بیان می‌شد)، اما یک نمادگذاری اختصاری جبری در قرن ششم/دوازدهم پدیدار شد. این نمادگذاری با تمرکز بر یک نسخهٔ خطی تونسی قرن دوازدهمی/هجدهمی از ابن هائم، توسط عبدالجواد [۲۰۰۲] بررسی شده است. اوکس [۲۰۰۹] نیز این نمادگذاری را توضیح داده و آن را در رساله‌های دیگر به کار برده است؛ وی[۲۰۰۷] استدلال کرده است که این نمادگذاری، «نماد» را توصیف می‌کند، و نه فقط «اختصار» را.

حل معادلات: هنر حل معادلات، که امروزه بسیار تحت تأثیر جبر نمادگذارانهٔ ماست، در سده‌های میانه به گونه‌ای متفاوت درک شده بود. نه تنها زبان آن، بلکه پرداختن به آن، از مؤلفی به مؤلف دیگر تفاوت می‌کرد. اثر کهن متقدم در این زمینه (که نام «جبر» از آن گرفته شده است) جبر و مقابله تألیف خوارزمی مربوط به اوایل قرن سوم/نهم است که راشد [۲۰۰۷آ] آن را تصحیح و به فرانسوی ترجمه کرده و نیز ترجمهٔ انگلیسی آن [راشد، ۲۰۰۹آ] را چاپ کرده است. راشد می‌گوید که شیوهٔ خوارزمی در این اثر به‌طور آشکارا عربی است، و با کارهای یونانی متقدم که گاه «جبر هندسی» نامیده می‌شود متفاوت است و تحت تأثیر متون هندی نیز نیست. قطعاً مؤلفان بعدی، مانند ثابت بن قره در رساله‌ای که تناظر بین روش‌های جبردانان و هندسه‌دانان برای حل معادلات درجهٔ دوم را نشان می‌دهد[۱] (راشد[۲۰۰۹د] آن را تصحیح و به فرانسوی ترجمه کرده است)، به‌طور مستقیم‌تری تحت تأثیر سنت یونانی بوده‌اند. اثر جبری مهم بعدی کتاب الشامل فی الجبر والمقابلة از ابوکامل، مربوط به حدود ۹۰۰ میلادی (قرن چهارم هجری) است. این اثر تا اندازه‌ای متکی بر کار خوارزمی، و همچنین متکی بر کار هرون و اقلیدس است. شلهوب [۲۰۰۴] نخستین ترجمهٔ آلمانی بخش اصلی کار ابوکامل را منتشر کرده، و اوکس و الخطیب از کار این دو نفر در پژوهششان (اوکس و الخطیب، ۲۰۰۵) دربارهٔ کاربردهای مختلف واژهٔ «مال» استفاده کرده‌اند.

مؤلفان بعدی نیز رهیافت‌های متفاوتی داشته‌اند. مثلاً رساله‌ای فارسی از قرن هفتم/سیزدهم تألیف کمال‌الدین فارسی، که شرحی بر اثری قدیم‌تر از بغدادی است، به‌کارگیری روش‌های

۱. قول لأبی الحسن ثابت بن قرة فی تصحیح مسائل الجبر بالبراهین الهندسیة.–م

هندسی یونانی تحلیل و ترکیب را برای حل معادلات جبری توضیح داده است [موالدی، ۲۰۰۰]. یکی از معروف‌ترین رساله‌ها در جبر، رسالهٔ عمر خیام دربارهٔ حل معادلات درجهٔ سوم است که راشد و وهاب‌زاده [۱۹۹۹] آن را (همراه با یک رسالهٔ مرتبط کوتاه) تصحیح و به فرانسوی ترجمه کرده‌اند. در این اثر خیام چهارده گونهٔ مختلف از معادلات درجهٔ سوم را با تقاطع دادن مقاطع مخروطی حل کرده است (برای مروری بر اثر خیام، محتوا و تأثیر آن، بنگرید به مقالهٔ جبار [۲۰۰۰ سی]). این چهارده نوع به دلیل نبودن اعداد منفی ظاهر شده‌اند؛ بدون این اعداد، مثلاً $ax^3+bx^2=c$ با $ax^3=bx^2+c$ متفاوت به شمار می‌آید. استفادهٔ خیام از مفهوم محدود یونانی از عدد، مانع تدارک دیدن بنیانی دقیق برای جبر با عطف توجه به اعداد حقیقی در مقام «مقیاس‌های همگن مقادیر متوالی» نشد [اوکس، ۲۰۱۱]. اما چنانکه دیده می‌شود و بلوستا [۲۰۰۴آ] استدلال کرده، ضرورت طرح مفهوم اعداد منفی با برخی رساله‌های جبری مثل آثار کرجی و سمؤال، پیش‌تر شروع شده بود.

خوانندگانی که در جستجوی مروری گسترده بر توسعهٔ جبر از زمان خوارزمی تا قرن ششم/دوازدهم هستند، می‌توانند به مقالهٔ جبار [۲۰۰۵] که برای مخاطبان عام‌تری نوشته شده، رجوع کنند. این مقاله به تأثیرات و انتقال‌های فرهنگی مختلفی مربوط می‌شود و برای بحث دربارهٔ برخی جزئیات به غرب جهان اسلام می‌پردازد.

نظریهٔ اعداد: هرچند نظریهٔ اعداد دورهٔ اسلامی چنان‌که باید در دستور کار پژوهش‌های جدید قرار نگرفته، چندین پژوهش به این موضوع پرتو افکنده است. اعداد متحاب (دو عدد که مجموع مقسوم علیه‌های یکی از آن‌ها برابر با دیگری است) مدام مورد علاقه بوده است، چنانکه دو اثر در این باره که پنج قرن با هم فاصله دارند به این امر گواهی می‌دهند. مقالة فی استخراج اعداد المتحابة تألیف ثابت بن قره در قرن سوم/نهم که روشی برای محاسبهٔ این جفت اعداد بیان می‌کند، توسط راشد و هوزل [۲۰۰۹] تصحیح و به فرانسوی ترجمه شده است. تذکرة الاحباب فی بیان التحاب تألیف کمال‌الدین فارسی در قرن هفتم/سیزدهم شامل قضایایی متوالی است که می‌توانند به‌عنوان بخشی از اثبات نظریهٔ بنیادین حساب تفسیر شود (این رساله توسط آغَرگون [۲۰۰۰] توضیح داده شده است). «اعداد مجسم» نیز در مناطقی چون اندلس و مغرب جلب توجه کردند. جبار [۲۰۰۰ب] دربارهٔ اثری از ابن مُنعِم مربوط به اوایل قرن هفتم/سیزدهم پژوهش کرده که به بررسی تاریخچهٔ این اعداد در این مناطق با آغاز از قرن پنجم/یازدهم می‌پردازد؛ بحث ریاضی آن با چند مورد از به کارگیری چندجمله‌ای‌ها مرتبط است.

نتیجه گیری

حجم زیاد پژوهش‌هایی که در اینجا گزارش شدند نشانهٔ آشکاری از این است که مطالعهٔ علوم ریاضی دورهٔ اسلامی به‌خوبی و به‌سرعت رو به پیشرفت است. انبوه تصحیح‌ها و ترجمه‌های

جدید، دستیابی به متون اصیل را نسبت به پانزده سال پیش بسیار آسان کرده است. ما همچنان به نمایش تصویری کامل‌تر نزدیک شده‌ایم: نسبت به تمرکز بر منابعی که علایق ما را به خود جلب می‌کنند، امروزه پژوهشگران به‌طور چشمگیرتری به مطالعهٔ موضوعات متنوع در منابع متقدمه می‌پردازد. زمینی که می‌توانیم درکی از این شاخهٔ علمی در آن بیفشانیم، حاصلخیز است.

اما در اینجا با پرسش‌های اساسی روبرو هستیم. چنانکه یادآور شدیم، مباحث مفصل‌تری دربارهٔ این‌که چگونه به تاریخ ریاضیات بپردازیم، برخورد با علوم دقیق دورهٔ اسلامی را آغاز می‌کند. هنگام نوشتن یک تاریخ فرهنگ ریاضی، آیا شخص باید مثل بیشتر کارهایی که قبلاً انجام شده عمل کند- با تمرکز بر والاترین دستاوردهای فکری و دنبال کردن روایتی از یک شخصیت بزرگ به شخصیت بزرگ دیگر؟ آیا باید به جای کارهای روزمرهٔ پژوهشگران ریاضی، بر نمایش تصویری بهتر از زندگی فکری یک ریاضیدان نوعی در یک زمان خاص تأکید کنیم؟ آیا باید حتی جلوتر برویم و بر زمینهٔ اجتماعی نظریات ریاضی، مؤسسات، و آموزش ریاضی همهٔ مردم تأکید کنیم؟ هرچند بیشترِ کارهای رایج به‌سوی تمرکز بر لبهٔ تاریخی هدایت‌کنندهٔ کارهای انجام شده در ریاضیات در حال ادامه است،این رهیافت‌های جایگزین، قابلیت خوبی برای غنی کردن تلاش‌های ما ایجاد می‌کند. آن‌ها به تاریخ علوم دقیق دورهٔ اسلامی اجازه می‌دهند تا به دامنه‌ای وسیع‌تر و عمیق‌تر از موضوعات تاریخی پاسخ دهند، و از طریق آن این شاخهٔ علمی را به‌طور کلی- بدون نیاز به مستثنی کردن و یا رد کردن خط سیر سنتی‌مان- بیشتر مناسب جامعه می‌سازند.

سرانجام، دسترسی افزاینده به منابع اولیه، به ما اجازه می‌دهد تا چشم‌اندازهای معنادار دربارهٔ ویژگی منحصر به فرد ریاضیات دورهٔ اسلامی را گسترش دهیم. ما نیازمند یافتن روش‌ها و واژگان مناسب برای مشخص کردن آنچه هستیم که این دوره را شبیه یا متفاوت با فرهنگ‌های علمی پیش، همزمان و یا پس از آن می‌سازد. در واقع، چنانکه صبره اشاره کرده است، باید واژه‌هایی برای توضیح ویژگی‌های مختلف خرده‌فرهنگ‌های پرشمار و متنوع دورهٔ اسلامی بیابیم. قطعاً یک دین و زبان مشترک (و نه جهانی) تأثیر بسیاری بر ویژگی علمی دارد، هرچند ماهیت این تأثیرات همیشه آشکار نیست. اما آیا راه‌های دیگری نیز برای تشخیص شیوه‌های استدلال، انواع علاقه‌های ریاضی و علمی، و مرزهای متغیر تفکر وجود دارند؟ به‌طور کلی جامعه هنوز مجموعهٔ قابل قبولی از موضوعات، یا حتی یک دستور زبان مشترک، برای رسیدن به توافق بر سر این مطالب چالش برانگیز ندارد. با این حال، ثمربخشی پژوهش و آگاهی رو به رشد ما از این مسائل عمیق، بی‌شک ما را مطمئن می‌سازد که در پانزده سال آینده پیوسته رهیافت‌های معتبر و جالب پدیدار خواهد شد.