مثلثات کروی در زیج *جامع* کوشیار گیلانی[۱]

جان لنارت برگرن[۲]
ترجمهٔ محمد باقری[۳] و مرضیه شمس یوسفی[۴]

مقدمه

پروفسور کندی و دانشجویانش انواع گسترده‌ای از منابع و پژوهش های مربوط به هندسهٔ کروی دورهٔ اسلامی را در اختیار اهل علم قرار داده‌اند و این مبحث علاقهٔ مرا نیز جلب کرده است. از این رو بی‌مناسبت ندیدم که در مجموعه‌ای که به افتخار وی منتشر می‌شود، مقاله‌ای دربارهٔ مثلثات کروی عرضه کنم و به این مبحث به همان شیوهٔ مرسوم در پایان قرن دهم میلادی (قرن چهارم هجری) خواهم پرداخت. مبنای کارم فصل سوم از مقالهٔ چهارم زیج جامع کوشیار گیلانی، دانشمند پرآوازهٔ آن عصر است. با آنکه رسالهٔ حساب کوشیار به انگلیسی ترجمه و منتشر شده، زیج او چندان مورد توجه تاریخ‌نگاران علم قرار نگرفته است.

تصویر جامعی از نجوم کروی در اواخر قرن دهم میلادی (قرن چهارم هجری) در مقالید علم الهیئة بیرونی آورده شده است. در این روایت مفصل، پای کوشیار کمتر به میان کشیده شده، زیرا بیرونی به ندرت از وی نام برده است. اما فصل مربوط به مثلثات در زیج جامع شامل توالی زیبایی از نتایج است که در تشریح چگونگی حل برخی مثلث‌های کروی قائم‌الزاویه به اوج خود می‌رسد. چون هیچ ترجمهٔ انگلیسی از رساله‌ای عربی دربارهٔ مثلثات کروی موجود نیست، ترجمهٔ بخشی از زیج کوشیار را که مربوط به مثلثات کروی است همراه با توضیح‌های مربوط به آن در اینجا عرضه می‌کنم.

---

1. Spherical Trigonometry in Kūshyār ibn Labbān's Jāmi' Zīj, in *From Deferent to Equant: A Volume of Studies in the History of Science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy*, Annals of the New York Academy of Sciences, eds. D. A. King and G. Saliba, New York, 1987, vol. 500: pp. 15–33.

۲. Jan Lennart Berggren استاد بازنشستهٔ گروه ریاضی دانشگاه سایمون فریزر کانادا berggren@sfu.ca؛ وی این مقاله را به پروفسور ای. اس. کندی تقدیم کرده است.

۳. تاریخ‌نگار ریاضیات و اخترشناسی mohammad.bagheri2006@gmail.com

۴. استادیار دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه گیلان m.shams@guilan.ac.ir

نوشتهٔ بیرونی دربارهٔ تاریخ مثلثات کروی

بخشی از سابقهٔ تاریخی مثلثات کروی موجود در زیج کوشیار را بیرونی ذکر کرده است. ظاهراً بیرونی در اواخر قرن دهم میلادی (قرن چهارم هجری) و به هنگام وقوع ماجراهایی که شرح می‌دهد، دستیار امیرزاده ابونصر بن عراق بوده و اطلاعاتی که در پی می‌آید از روایت بیرونی در مقالید گرفته شده است.

زمانی در اواخر قرن دهم میلادی (قرن چهارم هجری)، عبدالجلیل سجزی ریاضیدان و منجم برجسته، مجموعه‌ای از دستورها برای منجمان و صنعتگران به دست آورد و طی نامه‌ای چگونگی اثبات آن‌ها را از ابونصر جویا شد. ابونصر در پاسخ وی کتاب السموت را که بر اساس قضیهٔ منلائوس دربارهٔ چهارضلعی کروی تدوین شده بود، نوشت؛ اما دو قضیهٔ دیگر دربارهٔ سینوس کمان‌های کروی را نیز بدان افزود.

ابوالوفای بوزجانی، منجم و ریاضیدان مهمی که در بغداد می‌زیست، از وجود این رسالهٔ ابونصر آگاه شد و پس از دیدن نسخه‌ای از آن، طی نقدی آن را متکی به روش‌های قدیمی (یعنی قضیهٔ منلائوس و نسبت‌های مرکب) قلمداد کرد. ابونصر از کار خود به عنوان روشی که در زمینهٔ مسئلهٔ عرضه‌شده از سوی سجزی معتبر است، به‌شدت جانب‌داری کرد. وی رسالهٔ فی معرفة قسی الفلکیه...را خطاب به بیرونی جوان نوشت که مطالبش مستقیماً دربارهٔ زاویه‌ها و کمان‌های مثلث کروی بود. در این رساله قضایا و اثبات‌هایی دربارهٔ دستور کمیت‌های چهارگانه (نتیجهٔ قضیهٔ ۱ را که در پی می‌آید، ببینید) و اثباتی برای قضیهٔ سینوس‌ها در مثلث کروی (قضیهٔ ۴ که در پی می‌آید) عرضه کرد.

بیرونی می‌نویسد یک سال بعد، ابونصر بخش‌هایی از زیج مجسطی ابوالوفا را به دست آورد. این اثر علاوه بر اثبات «دستور کمیت‌های چهارگانه» و «قضیهٔ سینوس‌ها» در مثلث کروی، شامل قضایا و اثبات‌هایی برای قضیهٔ فیثاغورس در مثلثهای کروی قائم الزاویه (قضیهٔ ۲) و قضیهٔ تانژانت‌ها در این نوع مثلثها (قضیهٔ ۵) بود. بیرونی کشف قضیهٔ تانژانت‌ها را به ابوالوفا نسبت می دهد، ولی قضیهٔ سینوس‌ها را عمدتاً کار ابونصر به شمار می آورد و با ستودن هوش و شخصیت ابونصر، تلویحاً وی را فراتر از ابوالوفا می‌داند.

اما من جای دیگری اشاره کرده‌ام به اینکه بیرونی گرایش به محکوم کردن ابوالوفا داشته، و با توجه به اینکه زمان تألیف مجسطی ابوالوفا مشخص نیست، به دشواری می‌توان نظر مثبت دکتر دبارنو را پذیرفت که قضیهٔ سینوس‌ها برای مثلث کروی نامشخص نخستین بار در رساله در باب تعیین کمان‌های کروی اثر ابو نصر مطرح شده است. شاید ابونصر مستقلاً قضیهٔ سینوس‌ها را یافته باشد، ولی از شواهد عرضه شده نمی‌توان نتیجه گرفت که وی نخستین کاشف آن بوده است. طبق نوشتهٔ دکتر دبارنو، ابونصر رساله در باب تعیین کمان‌های کروی خود را در سال ۹۹۷ میلادی (۳۸۷ قمری) یا شاید اندکی زودتر نوشته

است. اما ابوالوفا در سال ۹۹۷ یا ۹۹۸ میلادی (۳۸۷ یا ۳۸۸ قمری) در سن ۵۷ یا ۵۸ سالگی درگذشته و احتمالاً کشفیات ریاضی خود را مدتی پیش‌تر از ۵۷ سالگی انجام داده است.

در خلال این حوادث بود که بیرونی به ری سفر کرد و چنان که خود می‌گوید در آنجا با خجندی اخترشناس دیدار کرد و خجندی کشف خود را در مورد دستور کمیت‌های چهارگانه که خود آن را «قانون هیئت» می‌خواند به وی عرضه کرد. بیرونی سپس به ملاقات کوشیار (که مسلماً او هم در ری بود) رفت و کوشیار به وی گفت که او هم همان قضیه را به کار برده و آن را "قضیهٔ مغنی" (بی‌نیاز کننده [از قضیهٔ منلائوس]) نامیده است. ضمناً در حضور خجندی به بیرونی گفت که وی تنها اثبات آن را «پیراسته» است و خودش آن را کشف نکرده است.

بیرونی سپس توضیح می‌دهد که وقتی کوشیده است چگونگی استنتاج قضیهٔ سینوس‌ها از دستور کمیت‌های چهارگانه را برای دو منجم ری روشن کند، «از تأیید اینکه نسبتی بین مقادیر مذکور وجود دارد امتناع کردند، زیرا تصور نمی‌کردند که این نسبت چنان که ثابت کرده‌ایم، برقرار باشد». آنها قضیهٔ تانژانت‌ها را هم نپذیرفتند.

اما مسلماً کوشیار می‌خواست به برهانی پذیرفتنی دست یابد، زیرا قضایای متوالی مذکور در مقدمهٔ فوق هر دو قضیهٔ سینوس‌ها و تانژانت‌ها را در بر می‌گیرد و آنچه در پی می‌آید خلاصه‌ای از قضایای اصلی کوشیار و اثبات آن‌ها با نمادگذاری امروزی است. هر قضیه موضوع «باب» جداگانه‌ای از مقاله است ولی در اینجا عنوان "قضیه" به کار رفته است. شکل‌ها برای این مقاله رسم شده‌اند ولی به شکل‌های نسخهٔ خطی نزدیکند. تفاوت عمدهٔ ایجاد شده در نامگذاری ضلع روبرو به زاویهٔ X در مثلث XYZ به صورت x است. علامت ~ به معنی «مشابه است با» به کار رفته و اگر u کمانی از دایرهٔ عظیمه باشد، $\bar{u}$ به معنی $90^\circ - u$ است. تابع‌های مثلثاتی که حروف اولشان بزرگ نوشته شده، به معنی رایج در مثلثات دورهٔ اسلامی‌هستند؛ مثلاً $\mathrm{Sin}\,u = R\sin u$ که در آن R شعاع دایره‌ای است که u کمانی از آن است.

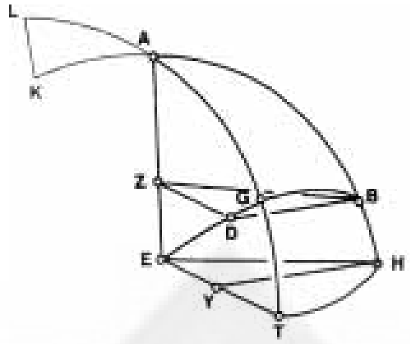
چکیدهٔ بخش مورد نظر از رساله

قضیهٔ۱. اگر ABG مثلث کروی قائمه در رأس G باشد، آنگاه:

$$\frac{\mathrm{Sin}(g)}{\mathrm{Sin}(a)} = \frac{\mathrm{Sin}(G)}{\mathrm{Sin}(A)}$$

برهان: (شکل ۱) b و g را امتداد می‌دهیم تا به ترتیب ربع‌های $\widehat{AT}$ و $\widehat{AH}$ حاصل شوند چنان که دایرهٔ عظیمهٔ $\widehat{HT}$، همانند $\widehat{BG}$، بر صفحهٔ $\widehat{AGT}$ عمود باشد. در صفحات دایره‌های عظیمهٔ $\widehat{HT}$ و $\widehat{BG}$ به ترتیب HY و BD را عمود بر شعاع‌های ET و EG رسم می‌کنیم و BZ و HE را هم عمود بر AE رسم می‌کنیم (چون AH یک ربع است، عمود وارد از H بر AE روی

مرکز E می‌افتد). سرانجام دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDZ و HYE را با رسم ضلع‌های DZ و YE کامل می‌کنیم.



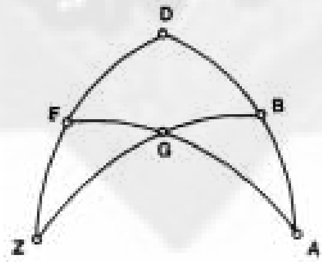
شکل ۱

اکنون BD و BZ به ترتیب با HY و HE موازی‌اند، پس $\measuredangle B = \measuredangle H$. بنابراین $\Delta(BDZ) \sim \Delta(HYE)$، پس $\frac{BZ}{BD} = \frac{HE}{HY}$؛ اما داریم $BZ = Sin(g)$، $BD = Sin(a)$، $HE = Sin(۹۰°) = Sin(G)$ و $HY = Sin(HT) = Sin(A)$، پس اثبات قضیه کامل است.

نتیجه: اگر ABG و EKL دو مثلث کروی باشند چنان که $\measuredangle A = \measuredangle E$ و در L و G قائمه باشند، آنگاه:

$$Sin(g) : Sin(a) = Sin(l) : Sin(e).$$

برهان: چون $\measuredangle A = \measuredangle E$ هر دو طرف تناسب طبق قضیهٔ ۱ با $\frac{Sin(۹۰°)}{Sin(A)}$ برابرند.



شکل ۲

قضیهٔ۲: اگر ABG مثلثی کروی قائمه در زاویهٔ B باشد آنگاه:

$$\frac{Cos(a)}{Cos(b)} = \frac{Sin(۹۰°)}{Cos(g)}.$$

برهان: (شکل ۲) b و g را امتداد می‌دهیم تا ربع‌های AD و AE کامل شوند و محل برخورد دایره‌های عظیمهٔ BG و DE را Z می‌نامیم. پس $\measuredangle E$ قائمه است، بنابراین با استفاده از قضیهٔ ۱ در ΔEZG خواهیم داشت:

$$\frac{\text{Sin}(e)}{\text{Sin}(z)}=\frac{\text{Sin}(۹۰^\circ)}{\text{Sin}(Z)}$$

اما $e=\overline{a}$ و $z=\overline{b}$، در حالی که کمان BD که اندازهٔ زاویهٔ Z است با $\overline{g}$ برابر است. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

قضیهٔ۳: سه حکم مربوط به تناسب‌هایی که این قضیه را تشکیل می‌دهند همراه با اثبات آن‌ها به صورت زیر خلاصه می‌شود.

فرض‌های $\frac{A}{B}=\frac{G}{D}$ و $\frac{E}{W}=\frac{Z}{H}$ در هر سه مشترکند و آن‌ها را به صورت معادل (۱) $B\cdot G=A\cdot D$ و (۲) $W\cdot Z=E\cdot H$ می‌نویسیم.

بخش ۱. اگر $B=W$ و $G=Z$ آنگاه $\frac{A}{E}=\frac{H}{D}$ و $\frac{A}{H}=\frac{E}{D}$.

برهان: در رابطهٔ (۱)، به جای B، W و به جای G، Z می‌گذاریم؛ در این صورت داریم $W\cdot Z=A\cdot D$. از ترکیب این رابطه با (۲) خواهیم داشت $E\cdot H=A\cdot D$. پس $\frac{A}{H}=\frac{E}{D}$ (تساوی دیگر اثبات نشده است).

بخش۲. اگر $G=Z$ و $A=E$ آنگاه $\frac{B}{W}=\frac{D}{H}$.

برهان: در رابطهٔ (۱)، به جای G، Z و به جای A، E می‌گذاریم؛ در این صورت داریم $B\cdot Z=E\cdot D$ یعنی $\frac{B}{D}=\frac{E}{Z}$. همچنین اگر رابطه (۲) را به صورت تناسب بنویسیم، داریم $\frac{W}{H}=\frac{E}{Z}$. پس $\frac{W}{H}=\frac{B}{D}$، بنابراین $\frac{B}{W}=\frac{D}{H}$.

بخش۳. اگر $B=W$ و $D=H$ آنگاه $\frac{A}{E}=\frac{G}{Z}$.

برهان: در رابطهٔ (۲) به جای W، B و به جای H، D می‌گذاریم؛ در این صورت داریم $B\cdot Z=E\cdot D$ یا $\frac{B}{D}=\frac{E}{Z}$. ضمناً صورت تناسبی فرض (۱) چنین است، $\frac{B}{D}=\frac{A}{G}$. پس $\frac{A}{G}=\frac{E}{Z}$ و در نتیجه $\frac{A}{E}=\frac{G}{Z}$.

قضیهٔ۴: اگر ABG مثلث کروی باشد آنگاه:

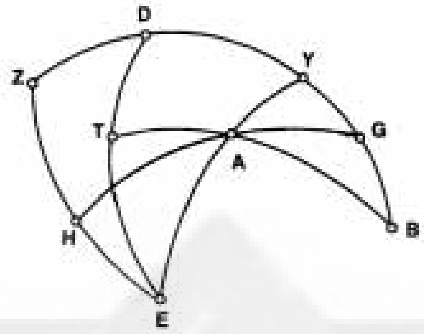
$$\frac{\text{Sin}(G)}{\text{Sin}(B)}=\frac{\text{Sin}(g)}{\text{Sin}(b)}.$$

برهان: (شکل ۳) با در نظر گرفتن B و G به عنوان قطب، ربع‌های DTE و ZHE را در یک نیم‌کره رسم می‌کنیم چنان که E یک قطب GB باشد. اکنون اگر از این قطب، دایرهٔ عظیمهٔ EAY را رسم کنیم، زاویهٔ Y قائمه خواهد بود. بنابراین طبق قضیهٔ ۱، در مثلث ΔBYA خواهیم داشت:

$$\frac{\text{Sin}(g)}{\text{Sin}(\overset{\frown}{AY})}=\frac{\text{Sin}(۹۰^\circ)}{\text{Sin}(\overset{\frown}{TD})},$$

زیرا $\widehat{TD}$ اندازهٔ $\measuredangle B$ است. همچنین با استفاده از قضیهٔ ۱، در ΔGYA نتیجه می‌شود:

$$\frac{\mathrm{Sin}(b)}{\mathrm{Sin}(\widehat{AY})}=\frac{\mathrm{Sin}(90^\circ)}{\mathrm{Sin}(\widehat{HZ})}.$$



شکل ۳

از بخش ۱ قضیهٔ ۳ داریم

$$\frac{\mathrm{Sin}(g)}{\mathrm{Sin}(b)}=\frac{\mathrm{Sin}(\widehat{HZ})}{\mathrm{Sin}(\widehat{TD})}$$

و چون $\mathrm{Sin}(G)=\mathrm{Sin}(\widehat{HZ})$ و $\mathrm{Sin}(B)=\mathrm{Sin}(\widehat{TD})$، اثبات قضیه کامل می‌شود.

قضیهٔ۵: اگر ABG یک مثلث کروی با زاویهٔ قائمهٔ B باشد آنگاه

$$\frac{\mathrm{Sin}(g)}{\mathrm{Tan}(a)}=\frac{\mathrm{Sin}(90^\circ)}{\mathrm{Tan}(A)}.$$

برهان: (شکل ۴) کمان‌های $\widehat{AB}$ و $\widehat{AG}$ را به ترتیب به ربع‌های $\widehat{AH}$ و $\widehat{AT}$ کامل می‌کنیم و شعاع کره، AE، را رسم می‌کنیم. عمود BZ بر AE را رسم و شعاع‌های EG و ET را تا نقاط D و Y ادامه می‌دهیم و شعاع‌های EB و EH را رسم می‌کنیم. عمودهای BD و HY در نقاط B و H را بر صفحهٔ HB رسم می‌کنیم. چون BD و HY به‌ترتیب در صفحهٔ دوایر BG و HT قرار دارند، شعاع‌های EG و ET را در D و Y قطع می‌کنند. در این صورت به سادگی می توان نشان داد که صفحات DBZ و HYT با یکدیگر موازی‌اند. پس DBZ عمود بر AH و بنابراین DZ عمود بر AE است. در نتیجه DZ و .. با YE و EH موازی‌اند، پس زاویهٔ *YEH*=زاویهٔ *DZB*. بنابراین مثلث *DZB* با مثلث YEH متشابه است زیرا هر دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. بنابراین $BZ/BD=HE/HY$.

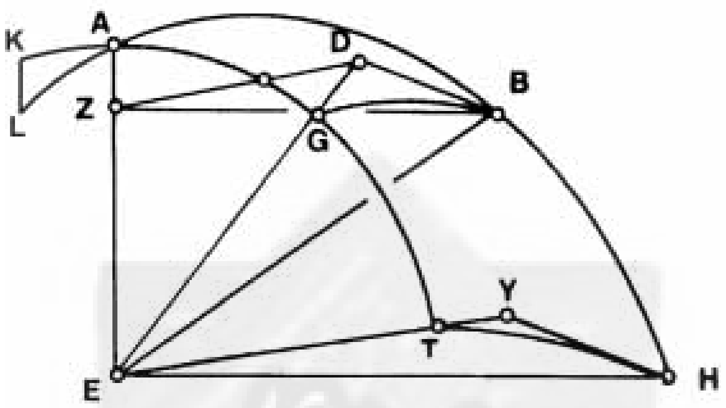
با توجه به این نکته که $BZ=\mathrm{Sin}(g)$ و $BD=\mathrm{Tan}(a)$ و $HE=\mathrm{Sin}(90^\circ)$ و $HY=\mathrm{Tan}(A)$ برهان کامل می‌شود.

نتیجه: اگر ABG و EKL مثلث‌های کروی با زوایای قائمه در G و L و زوایای برابر A و E باشند، آنگاه:

۶۰

$$\frac{\text{Sin(b)}}{\text{Tan(a)}}=\frac{\text{Sin(k)}}{\text{Tan(e)}}$$

سرانجام کوشیار روش‌های زیر را به عنوان راه حل در مثلث کروی ABG با زاویهٔ قائمهٔ G عرضه می‌کند:



شکل ۴

۱. اگر A و a یا g معلوم باشند آنگاه بنا بر قضیهٔ ۱، $\frac{\text{Sin(g)}}{\text{Sin(a)}}=\frac{\text{Sin}(90^\circ)}{\text{Sin A}}$ و بنابراین می‌توان g یا a را یافت.

۲. اگر دو ضلع دلخواه معلوم باشند، بنا بر قضیهٔ ۲ داریم:

$$\frac{\text{Cos(a)}}{\text{Cos(g)}}=\frac{\text{Sin}(90^\circ)}{\text{Cos(b)}}$$

بنابراین ضلع سوم را می‌توان معلوم کرد.

۳. اگر A و b یا a و B معلوم باشند آنگاه، مثلا برای مورد اخیر، از قضیهٔ ۵ نتیجه می‌شود:

$$\frac{\text{Sin(a)}}{\text{Tan(b)}}=\frac{\text{Sin}(90^\circ)}{\text{Tan(B)}}$$

موارد ۱ و ۳ با هم نشان می‌دهند چگونه با دانستن یک زاویه و یک ضلع می‌توانیم ضلع دیگر را معلوم کنیم و مورد ۲ نشان می‌دهد که با دانستن دو ضلع می‌توان سومی را تعیین کرد.

بحث کوشیار با وجود درست بودن، کامل نیست؛ زیرا حتی نشان نمی‌دهد که برای یافتن زوایا، در زمانی که همهٔ اضلاع یک مثلث قائم الزاویه معلوم است، چگونه می‌توان از قضیهٔ ۱ بهره برد. همچنین در مورد حالتی که فقط زوایا معلوم هستند، چیزی نمی گوید. این بخش به وضوح نشان می‌دهد که هدف کوشیار عرضهٔ ابزارهای ریاضی ضروری برای کارمنجمان بوده است، نه نوشتن رسالهٔ منسجمی در بارهٔ مثلثات کروی.

ترجمه

[ترجمهٔ فارسی فصل سوم مقالهٔ چهارم زیج جامع کوشیار بر پایهٔ ویرایش متن عربی آن[1] فراهم شده که بر اساس همهٔ نسخه های موجود و در نتیجه کاملتر و دقیق‌تر از ترجمهٔ انگلیسی آن است. افزوده های توضیحی به متن درون پرانتز و افزوده های تکمیلی درون قلاب آمده است.]

فصل سوم: دربارهٔ مقدماتی که برهانها بر پایهٔ آنهاست

باب اول: مقدمه ای کلی برای اغلب برهانها

در هر مثلث (شامل) کمان‌هایی از دوایر عظیمهٔ روی کره، که در آن یک زاویهٔ قائمه وجود دارد و زاویهٔ دیگر مفروض (معلوم) است، نسبت سینوس وتر زاویهٔ قائمه به سینوس وتر زاویهٔ مفروض برابر است با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به سینوس زاویهٔمفروض.

فرض می کنیم ABG مثلثی باشد که در آن G زاویهٔ قائمهٔ و BAG زاویهٔ مفروض است (شکل ۱ را ببینید). در این صورت می‌گوییم نسبت سینوس کمان AB به سینوس کمان BG برابر است با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به سینوس زاویهٔ BAG.

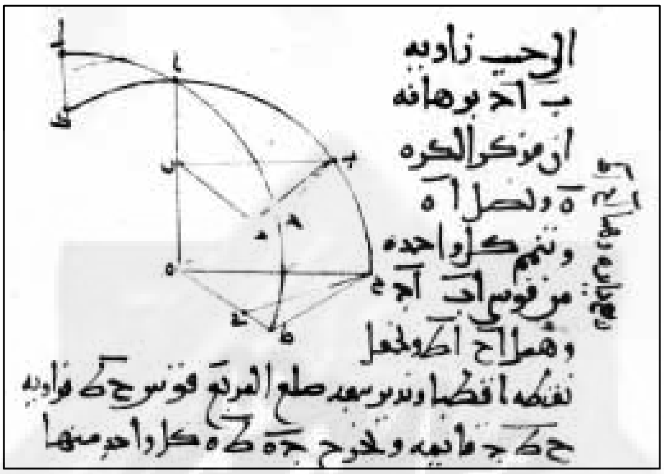
برهان: اگر مرکز کره E باشد و AE را رسم و کمان‌های AB و AG را به ربع دایره‌های AH و AT کامل کنیم، آنگاه اگر به قطب نقطهٔ A و به شعاع ضلع مربع (دایرهٔ عظیمهٔ کره) کمان HT را رسم کنیم، زاویهٔ HTG قائمه خواهد بود.

حال TE و GE را رسم می‌کنیم که هر کدام یک شعاع از دایرهٔ AGT و بنابراین در صفحهٔ این دایره هستند. BD را عمود بر GE و HY را عمود بر TE رسم می‌کنیم و این دو با صفحهٔ دایرهٔ AGT عمود هستند. (در ادامه) BZ را عمود بر AE و به طریق مشابه HE را (نیز) عمود بر آن رسم می‌کنیم، پس هر دو در صفحهٔ دایرهٔ ABH هستند. (در انتها) DZ را رسم می‌کنیم.

پس BZ سینوس کمان AB و BD سینوس کمان BG است. همچنین EH بزرگ‌ترین سینوس و HY سینوس کمان HT و سینوس زاویهٔ BAG است. چون BD و HY هر دو بر صفحهٔ دایرهٔ AGT عمود هستند و هر خط که از دو نقطهٔ D و Y (در این صفحه) خارج شود، با خط عمود زاویهٔ قائمه می‌سازد، زاویه‌های Y و D قائمه‌اند، BZ و EH هم موازی‌اند و BD و HY موازی اند. پس ZB و BD [به ترتیب] با EH و HY موازی‌اند. بنابراین زاویهٔ ZBD با زاویهٔ EHY برابر است. زوایای D و Y قائمه‌اند و بنابراین زوایای Z و E از دو مثلث، برابرند. پس دو مثلث ZBD

۱. ویرایش متن عربی از منبع زیر گرفته شده است:
Bagheri, Mohammad, “Az-Zīj al-Jāmiʿ: An Arabic Astronomical Handbook”, *Islamic Mathematics and Astronomy*, vol. 114, Frankfurt, 2009.

و EHY متشابهند و بنابراین نسبت ZB به BD با نسبت EH به HY برابر است. چنان کـه پیشـتر گفتـیم، ZB سـینوس کمـان AB و BD سـینوس زاویـهٔ BG و EH بزرگ‌تـرین سـینوس و HY سینوس زاویهٔ HAT است. پس نسبت سینوس کمان AB به سینوس کمان BG برابر است با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به سینوس زاویهٔ HAT. این چیزی است که می‌خواستیم نشان دهیم.



تصویر برگرفته از زیج جامع، نسخهٔ وهبی افندی (استانبول)، گ ۱۳پ (این نسخه در سال ۴۲۷ قمری از روی نسخه‌ای به خط کوشیار رونویسی شده است).

از اینجا معلوم می شود که اگر دو مثلث در کره دو زاویهٔ متسـاوی داشـته باشـند و دو تـا از آنهـا قائمه باشند، نسبت سینوس وتر زاویهٔ قائمه [از مثلث اول] به سـینوس وتـر زاویـهٔ برابـر، بـا نسـبت سینوس وتر زاویهٔ قائمه از مثلث دیگر به سینوس وتر زاویهٔ متناظر [با اولی] برابر است.

بر طبق این قاعده [آنچه گفته شد درست است]، زیرا اگر در مثلث AKL زاویهٔ L قائمـه باشـد وکمان AL را به AG اضافه کنیم و کمـان AK را بـه کمـان AB اضـافه کنـیم، چـون دو زاویـهٔ A برابرند، نسبت سینوس کمان AK به سینوس کمان KL با نسبت سـینوس کمـان AH بـه سـینوس کمان HT برابر است. به همین ترتیب اگر زاویهٔ K قائمه باشد، کمان AK را به AG و کمـان AL را به کمان AB اضافه کنیم، در این صورت نسبت تغییر نمی‌کند.

باب دوم: مقدمهٔ دیگری که نتیجه‌ای از مقدمهٔ اول است

در هر مثلث کروی با یک زاویهٔ قائمه، نسبت کسینوس یکی از دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه بـه کسینوس وتر زاویهٔ قائمه برابر است با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به کسینوس سومین ضلع.

فرض می‌کنیم در مثلث ABG (شکل ۲ را ببینید) زاویهٔ B قائمه باشـد. در ایـن صـورت نسـبت کسینوس BG به کسینوس GA با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به کسینوس AB برابر است.

برهان: به قطب A و به شعاع ضلع مربع [محاط در دایرهٔ عظیمه]، دایرهٔ DEZ را رسم می کنیم و کمانهای DEZ، AGE، ABD و BGZ را به ربع دایره تکمیل می کنیم. آنگاه در مثلث ZGE زاویهٔ E قائمه خواهد بود. پس بر اساس آنچه در مقدمهٔ اول ثابت کردیم، نسبت سینوس ZG به سینوس GE با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به سینوس زاویهٔ Z برابر است. اما ZG متمم BG و GE متمم AG است و BD کمان زاویهٔ Z و همچنین متمم AB است. بنابراین نسبت کسینوس BG به کسینوس AG برابر است با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به کسینوس AB و این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

باب سوم: یادآوری دربارهٔ‌خواص مقادیر متناسب

اگر چهار کمیت متناسب باشند و چهار کمیت متناسب دیگر با نسبتی دیگر نه بر توالی اولی، داده شده باشند، در این صورت اگر وسطین دو تناسب اول با وسطین تناسب دوم برابر باشند، نسبت جملهٔ اول تناسب اول به جملهٔ اول تناسب دوم برابر است با عکس نسبت جملهٔ آخر تناسب اول به جملهٔ آخر تناسب دوم. همچنین نسبت جملهٔ اول تناسب اول به جملهٔ آخر تناسب دوم برابر است با عکس نسبت جملهٔ آخر تناسب اول به جملهٔ اول تناسب دوم.

مثال اول:

ا ب ج د

۲ ۴ ۳ ۶ (۲/۴=۳/۶)

ه و ز ح

۱ ۴ ۳ ۱۲ (۱/۴=۳/۱۲)

اگر دو صورت تناسب اول با دو صورت تناسب دوم برابر باشند، نسبت مخرج اول به مخرج دوم در تناسب اول برابر است بانسبت مخرج اول به مخرج دوم درتناسب دوم.

مثال دوم:

ا ب ج د

۲ ۴ ۳ ۶ (۲/۴=۳/۶)

ه و ز ح

۲ ۸ ۳ ۱۲ (۲/۸=۳/۱۲)

اگر دو مخرج تناسب اول با دو مخرج تناسب دوم برابر باشند، نسبت صورت اول به صورت دوم در تناسب اول برابر است با نسبت صورت اول به صورت دوم در تناسب دوم.

تصویر برگرفته از زیج جامع، نسخهٔ اسکندریه، گ۴۹ر (این نسخه در سال ۴۱۵ قمری از روی نسخه‌ای به خط کوشیار رونویسی شده است).

مثال سوم:

ا	ب	ج	د
۲	۴	۳	۶
ه	و	ز	ح
۱	۴	۱٫۵	۶

برهان: [در مثال اول] نسبت **ا** به **ب** با نسبت ج به **د** و نسبت **ه** به **و** با نسبت **ز** به **ح** برابر است و **ب** با **و**، و**ج** با **ز** برابر است. [بنابراین] حاصل‌ضرب **ب**در**ج** با حاصل‌ضرب **ا** در **د** برابر است و حاصل‌ضرب **و**در**ز** با حاصل‌ضرب **ه** در**ح** برابر است. حال با حذف مقادیرمتساوی نتیجه می شود که **د+ا=ح+ه**. پس نسبت **ا** به **ح** برابر است با نسبت **ه** به **د**.

در مثال دوم ج×ب=**د×ا** و **ز×و=ح×ه**. اما **ه=ا** و **ز=ج**. بنابراین **د×ه=ز×ب** و **ح×ا=و×ج** و با حذف مقادیر متساوی داریم **د×و=ح×ب**. پس نسبت **ب** به **و** برابر است با نسبت **د** به **ح**.

در مثال سوم **د×ا=ج×ب** و **ح×ه=ز×و،و=ب** و **ح=د**. پس **د×ه=ز×ب** و **ح×ا=و×ج**. مقادیر مساوی را حذف می کنیم، نتیجه می شود **ج×ه=ز×ا**. پس نسبت **ا** به **ه** برابر است با نسبت **ج** به **ز** و این چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

خلاصۀ آنچه در این یادآوری آمده است:

اگر جمله های دوم و سوم [دو تناسب] برابر باشند، نسبت جمله های اول عکس نسبت جمله های چهارم می شود. اگر جمله های اول و جمله های سوم [دو تناسب] برابر باشند، نسبت جمله های دوم مثل نسبت جمله های چهارم می شود. اگر جمله های دوم و جمله های چهارم [دو تناسب] برابر باشند، نسبت جمله های اول مثل نسبت جمله های سوم می شود. همچنین نسبت جملۀ اول به سوم [در تناسب اول] مثل نسبت جملۀ اول به سوم [در تناسب دوم] می شود.

باب چهارم: مقدمۀدیگری که این هم نتیجه‌ای از مقدمۀ اول است

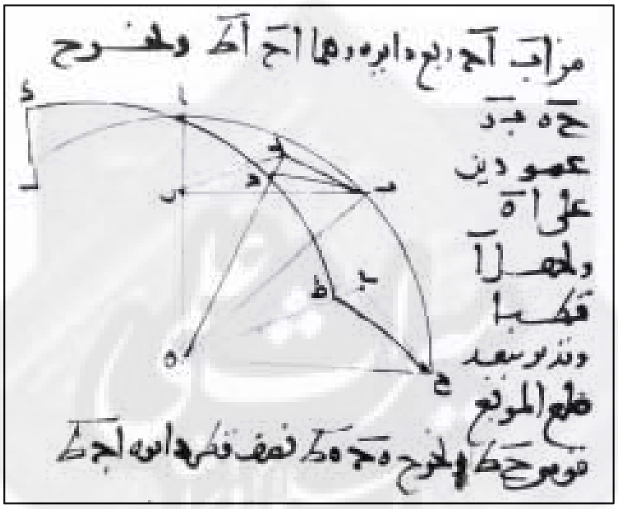
در هر مثلثی از کمان هایی در دوایر عظیمه نسبت سینوس یک زاویه به سینوس زاویۀ دیگر با نسبت سینوس وتر زاویۀ اولی به سینوس وتر زاویۀ دومی برابر است. فرض کنیم مثلث ABG (شکل ۳ را ببینید) زوایا و اضلاع نابرابر داشته باشد. می‌گویم نسبت سینوس B به سینوس G برابر است با نسبت سینوس کمان AG به سینوس کمان AB.

برهان: به قطب B و به شعاع ضلع مربع [محاط در دایرۀ عظیمه] دایرۀ DTE را رسم می‌کنیم.همچنین به قطب G، ZHE را رسم و [کمانهای] GAH، BAT و BGZ را کامل و EAY را رسم می‌کنیم. چون B قطب ETD است، BD و BT هرکدام ربع دایره‌اند و چون E قطب BDZ است، EZ، ED و EY هر کدام ربع دایره‌اند. همچنین چون G قطب ZHE است، GH و GZ هر کدام ربع دایره‌اند. بنابراین زاویۀ Y در مثلث BAY قائمه است. بنابراین نسبت سینوس BA به سینوس AY با نسبت بزرگ‌ترین سینوس، سینوس BT، به سینوس TD برابر است. همچنین زاویۀ Y در مثلث GAY قائمه است. بنابراین نسبت سینوس GA به سینوس AY با نسبت بزرگ‌ترین سینوس، سینوس GH، به سینوس HZ برابر است. چون وسطین مقادیر (تناسب) اول، یعنی سینوس AY و سینوس BT، با وسطین مقادیر (تناسب) دوم، یعنی سینوس AY و سینوس GH، برابرند، نسبت سینوس *BA*، وتر زاویۀ G به سینوس AG، وتر زاویۀ B، با نسبت سینوس HZ که با سینوس زاویۀ G برابر است، به سینوس TD برابر است و آن سینوس زاویۀ B است.پس نسبت سینوس زوایه به سینوس زاویه با نسبت سینوس وتر زاویهبه سینوس وتر زاویه برابر است. این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

باب پنجم:مقدمه‌ای مربوط به تانژانت که در اغلب برهان‌ها جانشین مقدمهٔ اول می‌شود

در هر مثلث کروی قائم الزاویه که در آن زاویهٔ دیگری معلوم باشد، نسبت سینوس ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه و زاویهٔ معلوم به تانژانت وتر زاویهٔ معلوم با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به تانژانت زاویهٔ معلوم برابر است.

فرض می کنیم درمثلث ABG زاویهٔ B قائمه و زاویهٔ مفروض BAG باشد (شکل ۴ را ببینید). می‌گویم نسبت سینوس کمان AB به تانژانت کمان BG با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به تانژانت زاویهٔ BAG برابر است.



شکل برگرفته از زیج جامع، نسخهٔ وهبی افندی (استانبول)، گ۱۸ر

برهان: *E* مرکز کره است و AE را رسم می‌کنیم. هر کدام از کمان‌های AB و AG را به ربع دایره های AH و AT تکمیل می‌کنیم. عمودهای HE و BZ بر AE را رسم می‌کنیم.به قطب A و به شعاع ضلع مربع [محاط در دایرهٔ عظیمه] کمان HT را می‌کشیم. شعاع‌های EG و ET از دایرهٔ AGT را رسم و آن‌ها را تا D و Y ادامه می‌دهیم.

شعاع EB از دایرهٔ ABH و عمودهای BD و HY بر (صفحهٔ کمان) BH را از (انتهای) شعاع‌های EB و EH رسم می‌کنیم. DZ را می‌کشیم. پس BZ در صفحهٔ ABH قرار دارد و سینوس کمان AB است. همچنین HE در صفحهٔ آن است و آن بزرگترین سینوس است و ZB و EH با BD و HY زوایای قائمه می سازند. پس صفحه‌های BZD و HEY موازی‌اند. همچنین DB بر قطر EB عمود است، بنابراین بر صفحهٔ ABH عمود است.

پس هر خط رسم شده در صفحهٔ ABH با عمود BD زاویهٔ قائمه می سازد.پس زاویهٔ DBZ قائمه است و زوایای HEY و BZD برابرند. بنابراین مثلث‌های HEY و ZDB متشابهند. پس

نسبت ZB به DB با نسبت EH به HY برابـر اسـت. ZB سـینوس کمـان AB و BD تانژانـت کمان BG و HE بزرگترین سینوس و HY تانژانت زاویۀ HAT است. بنابراین نسبت سینوس کمان AB به تانژانت کمان BG با نسبت بزرگترین سینوس به تانژانت زاویۀ BAG برابر است. این چیـزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

از اینجا معلوم می شود که در هر دو مثلث کروی که دارای دو زاویۀ برابرباشـند کـه دو زاویـه از آنها قائمه باشند، نسبت سینوس ضلع مجاور به زاویۀ قائمه و زاویـۀ برابـر، بـه تانژانـت ضـلع دیگـر مجاور به زاویۀ قائمه، برابر است با نسبت سینوس ضلع نظیر به تانژانت ضلع نظیر در مثلث دیگـر. طبق این دستور اگر در مثلث ALK زاویۀ K قائمه باشد یا زاویۀ L قائمه باشد، برهان مربوط به آن همان برهان مذکور در مقدمۀ اول است.

با این مقدمات، مثلث های قائم الزاویه در کره به یکی از سه صورت زیر معلوم می شوند:

اول: یک زاویه و یک ضلع که وتر زاویۀ قائمه یا وتر زاویۀ معلوم اسـت. [درایـن حالـت] نسـبت سینوس وتر زاویۀ قائمه به سینوس وتر زاویۀ معلوم با نسبت بزرگ‌تـرین سـینوس بـه سـینوس زاویـۀ معلوم برابر است.

دوم: دو ضلع دلخواه آن معلوم باشد. [در این حالت] نسبت کسینوس یکـی از دو ضـلع شـامل زاویۀ قائمه به کسینوس وتر زاویه قائمه با نسبت بزرگ‌ترین سـینوس بـه کسـینوس ضـلع سـوم برابـر است، و نسبت سینوس وتر زاویۀ قائمه به سینوس ضلع دیگر با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به سینوس زاویۀ [روبرو به] ضلع معلوم دیگر برابر است.

سوم: یک زاویۀ و ضلع مجاور به آن و به زاویۀ قائمه معلوم باشد. نسبت سـینوس ایـن ضـلع بـه تانژانت ضلع دیگر از دو ضلع شامل زاویۀ قائمه با نسبت بزرگ‌ترین سینوس به تانژانت زاویۀ معلـوم برابر است.

باب ششم: یادآوری دربارۀ خواص تانژانت

در هر دو کمان مختلف، تانژانت آنها برابر با عکس کتانژانت آنهاست. فرض می کنـیم A و B تانژانت دو کمان مختلف و G و D کتانژانت آن‌ها باشد. فرض کنیم E [طول] شاخص باشد و فرض کنیم کمانی باشد که تانژانت ان A است کتانژانـت آن G باشـد و کمـانی کـه تانژانـت آن B اسـت کتانژانت آن D باشد. در این صورت می گوییم نسبت A به B با نسبت D به G برابر است.

برهان: نسبت A به E برابر است با نسبت E به G و نسبت B به E برابر است با نسبت E بـه D .بنابراین حاصلضرب A در G بـا حاصلضـرب E در خـودش وهمچنـین حاصلضـرب B در D بـا حاصلضرب E در خودش برابر است.پس حاصلضـرب A در G بـا حاصلضـرب B در D مسـاوی است. پس نسبت A به B برابر است با نسبت D به G. این چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

باب هفتم: یادآوری دیگری که آن هم دربارهٔ خواص تانژانت است

حاصل تقسیم [هر مقدار] بر تانژانت [یا کتانژانت] یک کمان برابر است با حاصلضرب [آن مقدار] در کتانژانت [یا تانژانت] آن کمان. فرض می کنیم کتانژانت کمان مفروض۲ و تانژانت آن ۳۰/۶۰ و [طول] شاخص۱ باشد که واحد است. حاصل تقسیم ۶ بر۲، ۳ است. در این صورت می‌گوییم که حاصلضرب ۶ در ۳۰/۶۰ برابر با ۲ است.

برهان: حاصل تقسیم ۶ بر ۲، ۳ است. پس حاصلضرب ۲ در ۳ برابر است با ۶. همچنین حاصلضرب ۲در ۳۰/۶۰ یعنی نیم، با واحد برابر است. چون نسبت ۲ به ۱ با نسبت ۱ به ۳۰/۶۰ برابر است، نسبت ۳۰/۶۰ به ۳ با نسبت ۱ به ۶ برابر است. بنابراین حاصلضرب ۳۰/۶۰ در۶ با حاصلضرب ۱ در۳ برابر است. حاصلضرب ۱در۳ با ۳ برابر است، زیرا ۱ [طول]شاخص است که واحد فرض می‌شود. پس حاصلضرب ۳۰/۶۰در۶ با ۳ برابر است. از آنجا که کتانژانت هر کمان با تانژانت متمم آن برابر است، هر [مقداری] که به تانژانت کمانی تقسیم شود [نتیجه] برابر است با حاصلضرب [آن مقدار] در تانژانت متمم آن کمان. این چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

نتیجه‌گیری

مطالعهٔ گزارش کوشیار از مثلثات کروی زمان خود، این احساس را پدید می آورد که گرچه روایت کوشیار به طور خاص اصیل نبود، شامل آخرین نتایج بود و توجه کوشیار را به استنتاج های منسجم بر پایهٔ گزاره‌های ساده نشان می‌دهد. وجود نسخ متعدد این زیج، حاکی از پذیرش این روش از سوی بسیاری دیگر است.

مراجع

[1] Berggren, J. L., Al-Sijzī on the transversal figure. *Journal Hist. Arabic Science*, 5 (1981), pp. 23-26.

[2] Berggren, J. L., The origins of al-Bīrūnī's "Method of the zījes" in the theory of sundials. *Centaurus*, 1985, vol. 28, pp. 1-16.

[3] Al-Bīrūnī, Abu'l-Rayḥān, *The book of instruction in the elements of the art of astrology by Abū'l-Rayḥān . . . al-Bīrūnī.* tr. by R. Wright, London: 1934.

[4] Debarnot, M.-Th. *Les clefs d'astronomie d'Abū al-Rayḥān ... al-Bīrūnī: La trigonométrie sphérique chez les Arabes de l'est à la fin du Xe siècle,* Thèse du 3ème cycle, Paris, 1980.

[5] *Dictionary of Scientific Biography*, ed. Charles C. Gillispie, 16 vols., New York, 1970-1980.

[6] Kennedy, E. S., An overview of the history of trigonometry, in *Historical topics for the mathematics classroom*, pp. 333-359. Washington, D.C.: National Council of Teachers of Mathematics, Reprinted in Kennedy et al., 1969, pp. 3-29.

[7] Kennedy, E. S., *A commentary upon Bīrūnī's kitāb taḥdīd al-amākin*, American University of Beirut Press, Beirut, 1973.

[8] Kennedy, E. S., *The exhaustive treatise on shadows by Abū al-Rayḥān al-Bīrūnī* (vol. I: Translation, and vol. II : Commentary). Institute for the History of Arabic Science, Aleppo, 1976.

[9] Kennedy, E. S., &, colleagues and former students, *Studies in the Islamic exact sciences*, American University of Beirut Press, Beirut, 1983.

[10] Kūshyār ibn Labbān, *Principles of Hindu reckoning*. tr. by M. Levy and M. Petruck, Madison and Milwaukee, The University of Wisconsin Press, 1965.

[11] Sezgin, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums* (Band V: Mathematik and Band VI: Astronomie) E. J. Brill, Leiden, 1974, 1978.

[12] Suter, H., Zur Trigonometrie der Araber. *Bibliotheca Mathematica* (3.Folge) 10 (1909-1910), 1909-1910, pp. 156-160.

[13] Al-Ṭūsī, Naṣīr al-Dīn, *Traitè du Quadrilatère*. tr. by A. Carathèodory. Constantinople, Typographie et Lithographie Osmaniè, 1891.