فصل ۳

خجندی ریاضی‌دان

دورهٔ خجندی مربوط به پایان نخستین مرحلهٔ پیشرفت و تکامل ریاضیات در کشورهای خاور میانه و نزدیک و آسیای میانه است و یکی از جالب‌ترین مرحله‌های تاریخ جهانی اندیشهٔ ریاضی به شمار می‌آید.

می‌دانیم که ریاضیات کشورهای این منطقه در سده‌های میانه بر پایهٔ ترکیب دستاوردهای ریاضیات یونان باستان و هند با سنت علمی محلی شکل گرفت. ریاضیات کشورهای شرق که بر پایهٔ فراگیری میراث علمی باستان به وجود آمده بود، در راه تازه‌ای رشد و تکامل یافت. علاقه‌های ریاضی‌دانان در کنار مسأله‌های نظری بیش از پیش به سوی حل مسأله‌های کاربردی، تکمیل روشهای محاسبه که بیش از همه در اخترشناسی کاربرد داشت، گرایش یافت. بنابراین اشتیاق تکمیل منطقی ریاضیات، دانشمندان شرق را بر آن داشت تا به ترجمهٔ آثار یونان باستان و هندی به زبان عربی و فارسی بیشتر توجه کنند. مترجمان و مفسران آثار اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس، منلائوس، دیوفانتوس، بطلمیوس عملاً همهٔ ریاضی‌دانان و اخترشناسان بزرگ سده‌های میانهٔ شرق بودند. از جملهٔ آنها باید از خوارزمی، جوهری، فرغانی، مروزی (حبش حاسب) و دیگران نام برد.

از موفقیتهای دانشمندان هند باستان در رشتهٔ علوم دقیق باید از وارد کردن دستگاه دهدهی‌شمار با کاربرد صفر نام برد. این موفقیت دانشمندان هندی را مورخ ریاضی مشهور شوروی آ. پ. یوشکیویچ چنین ارزیابی می‌کند: «بزرگ‌ترین موفقیت علمی و فرهنگی ملتهای هند، دستگاه موضعی‌شمار است». این دستگاه از هند به خاور نزدیک نفوذ کرد و سپس به اروپا رسید و در آنجا با موفقیت روبرو شد و سبب پیشرفت سریع ریاضیات جهانی شد. به نوبهٔ خود با استفاده از موفقیتهای علم یونان باستان دوران هلنیستی، «ریاضی‌دانان هندی به رشتهٔ مثلثات رو آوردند و از آن جمله به جای قطر مورد استفادهٔ بطلمیوس، سینوس‌ها را بررسی کردند. این امر، منجر به معمول شدن تابعهای مثلثاتی در ریاضیات و برقراری برخی رابطه‌ها بین آنها شد».

از آثار پر شمار دانشمندان هند باستان پیش از همه باید از *سیدهانتاها* یاد کرد که ملتهای خاور نزدیک و میانه با آنها در زمان دو خلیفه منصور (۷۵۴ـ۷۷۵ م/۱۳۶ـ۱۵۸ هـ) و هارون الرشید (۷۸۷ـ۸۰۹ م/۱۷۰ـ۱۹۳ هـ) هنگامی که مرکز خلافت به بغداد منتقل شده بود، آشنا شدند. «در سال ۷۷۳م/۱۵۶ هـ از هند شخصی بسیار مطلع در علوم میهن خود به بغداد آمد. این شخص به روش سندهند مربوط به حرکت ستارگان و محاسبه با سینوسها با فاصله‌های یک‌چهارم درجه مسلط بود. او روشهای گوناگون در بارهٔ تعیین زمان غروب و طلوع برجهای منطقةالبروج را نیز می‌دانست و شرح کوتاهی دربارهٔ یکی از تألیفهای مربوط به آن تنظیم کرد... در این تألیف، کردجه[۲۷] با فاصلهٔ یک درجه محاسبه شده بود. خلیفه (منصور) دستور داد این رسالهٔ هندی به عربی برگردانده شود تا مسلمانان بتوانند معلومات دقیق از ستارگان کسب کنند. برگردان به محمد بن ابراهیم فزاری سپرده شد. او نخستین مسلمانی بود که

۲۷. واژهٔ عربی برگرفته از هندی که تحول معنایی زیادی داشته است (نالینو، *تاریخ نجوم اسلامی*، ترجمهٔ احمد آرام، تهران، ۱۳۴۹، ص ۲۱۰–۲۱۳)

زندگی خویش را وقف بررسی عمیق اخترشناسی کرده بود. بعدها اخترشناسان این برگردان را «سندهند کبیر» نامیدند. بنا به ادعای مورخ اخترشناسی ک. نالینو این اثر میان عربها چنان مشهور شد که آنها تا زمان مأمون که آموزش بطلمیوس در رشتهٔ محاسبه‌ها و جدولهای اخترشناسی رواج یافت، فقط بر طبق آن کار می‌کردند.

برگردان و تفسیر کارهای مؤلفان کهن به وسیلهٔ دانشمندان سده‌های میانهٔ خاور نزدیک و میانه در نیمهٔ نخست سدهٔ نهم میلادی / سوم هجری تنها آغاز دوران پیشرفت پر جوش و خروش علم بود. از پایان سدهٔ نهم میلادی / سوم هجری کار اصلی دانشمندان مسلمان شرق نمودار شد. در متنهایی با نام «تفسیر»، اغلب تألیفهای بکری پنهان بود که مسألهٔ مورد مباحثه از دیدگاه کاملاً تازه‌ای بررسی می‌شد.

خوارزمی دانشمند آسیای میانه ارزش والایی به کارهای مفسران داده است: «دانشمندان روزگاران گذشته و اندیشمندان ملتهای پیشین پیوسته سرگرم نگارش و تصنیف بوده‌اند. آنان به اندازهٔ توانایی و بینش، برای مردم پس از خود، در انواع دانش و گزیده‌های فلسفه کتابها تألیف کرده‌اند، بدان امید که در دیگر سرای پاداشی یابند و در این جهان از آنان نام نیک برجای ماند. نامی که تمام ثروتها و پیرایه‌هایی که با زحمت و رنج بسیار به دست می‌آید در برابرش هیچ است و برای رسیدن به آن، زحمت کشف رازهای دانش و دشواری حل مشکلات علمی آسان می‌نماید. [دانشور] یا دانشی‌مردی است که برای اولین بار دانشی را ابداع یا کشف می‌کند و برای آیندگان به یادگار می‌گذارد. یا اندیشمندی است که آثار پیشینیان را شرح و تفسیر می‌کند و مطالب مبهم و پیچیدهٔ کتابی را روشن می‌سازد، برای بیان مطلب راه ساده‌تری نشان می‌دهد و نتیجه‌گیری را آسان می‌کند».[۲۸]

گرچه تا زمان نسبتاً اخیر، برخی از مورخان علم سرمایه‌داری با پذیرفتن تنها فعالیتهای ترجمه‌ای و تفسیری دانشمندان آسیای میانه، خاور میانه و نزدیک، نقش

---

۲۸. جبر و *مقابله*، نوشتهٔ محمدبن موسی خوارزمی، ترجمهٔ حسین خدیوجم، انتشارات خوارزمی، تهران، ۱۳۴۸، ص ۲۶.

آنها را در پیشرفت علوم دقیق نفی می‌کردند، وانگهی اکثریت اخترشناسان و ریاضی‌دانان ملتهای گوناگون را «عرب» می‌نامیدند، اما از آغاز سدهٔ بیستم میلادی در نتیجهٔ پژوهشهای همه‌جانبهٔ آثار فراوان دانشمندان شرق از اصالت به اصطلاح «علم عربی» یاد کردند. بر پایهٔ یک سلسله پژوهشهای به عمل آمده به وسیلهٔ هم مورخان شوروی و هم خارجی می‌توان به این نتیجه رسید که دانشمندان سده‌های میانه با قدرشناسی از پیشینیان باستانی خود، نه تنها روشهای تازه‌ای در محاسبه ابداع کردند، بلکه به مطالعه و بررسی مسائل نظری بنیادین نیز می‌پرداختند.

از جمله مهم‌ترین موفقیتهای دانشمندان آسیای میانه و خاور نزدیک و میانه در رشتهٔ ریاضیات و اخترشناسی را می‌توان چنین برشمرد: ایجاد جبر به عنوان یک رشتهٔ مستقل علم ریاضی، طبقه‌بندی و ساخت و پرداخت روشهای حل معادله‌های درجهٔ دوم (خوارزمی)، دستگاه موضعی شصتگانی مطلق برای عددهای درست و کسری کوشیار گیلانی (که پیش از او تنها برای نوشتن کسرها به کار می‌رفت)، راه حل هندسی معادله‌های درجهٔ سوم (خیام و ماهانی)، اثبات قضیهٔ سینوسها در مثلثات کروی، تلاش برای اثبات این حکم که مجموع توانهای سوم دو عدد درست نمی‌تواند با توان سوم عدد درست دیگری برابر باشد، یعنی حالت خاصی از قضیهٔ معروف فرما، ساخت ابزار منحصر به فرد اخترشناسی «سدس فخری» و کشف واقعیت کاهش مقدار میل دایرةالبروج (خجندی)، بررسی نظریهٔ ترسیمهای هندسی به یاری پرگار و خط‌کش (ابن سینا، سجزی و ابوالوفا)، تدوین جدولهای چند رقمی دقیق مثلثاتی (کوشیار گیلانی، ابوالوفا، بیرونی)، اثبات تغییر طول اوج خورشید (بتانی، کوشیار گیلانی، بیرونی)، تعیین مختصات ۱۰۲۲ ستاره، دقیق‌تر از بطلمیوس (صوفی، بیرونی) و جز اینها.

نتیجهٔ بسیار مهم فعالیت ریاضی‌دانان دوران خجندی ساخت و پرداخت روشهای محاسبهٔ تابعهای مثلثاتی است که درجهٔ بالای دقت جدولهای مثلثاتی را تأمین می‌کند و معمولاً در زیجها (جدولهای اخترشناسی) می‌آید.

در سدهٔ دهم میلادی / چهارم هجری در محاسبه‌های مثلثاتی، قضیهٔ متناسب

بودن ضلعها و سینوسهای زاویه‌های روبه‌رو وارد می‌شود (قضیهٔ مسطح سینوسها).

ریاضی‌دانان شرق سده‌های میانه توجه ویژه‌ای به بررسی روشهای حل مثلثهای کروی داشتند. یادآوری می‌کنیم که در کارهای دانشمندان یونان باستان چهارضلعی کامل مسطح مورد بررسی قرار می‌گرفت. *اُکر*[۲۹] منلائوس دانشمند یونانی که در سدهٔ یکم میلادی در اسکندریه کار می‌کرد، نقش مهمی در تاریخ علم داشته است. همهٔ نتایجی که پیش از وی در رشته مثلثات به دست آمده بود، در آن تعمیم داده شده است. در این اثر نه تنها مثلث کروی برای نخستین بار معمول شد و قضیه‌هایی که پایهٔ مثلثات کروی بود پی‌درپی به اثبات رسید، بلکه شالودهٔ نظری برای محاسبه‌های مثلثاتی نیز به وجود آمد.

اثر منلائوس در نسخهٔ اصلی یونانی به‌جا نمانده است. این اثر تنها از روی ترجمهٔ عربی سده‌های میانه شناخته شده است. نخستین جملهٔ مقالهٔ سوم *اُکر* با نام «قضیهٔ منلائوس» (همچنین «قضیه در چهارضلعی کامل» و «قاعدهٔ شش کمیت») برای حالت مسطح به این صورت تنظیم شده است: فرض کنید خط‌های راست DF، DA، FB و AE که دو به دو همدیگر را قطع می‌کنند، شکل DACF را بسازند (شکلهای ۱ و ۲).

آنگاه این روابط برقرار است:

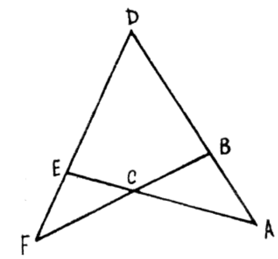
$$\frac{DB}{AB}\cdot\frac{AC}{EC}\cdot\frac{FE}{FD}=۱ \quad و \quad \frac{DA}{AD}\cdot\frac{EA}{EC}\cdot\frac{FC}{FB}=۱$$

ریاضی‌دانان شرق چهارضلعی کامل را «شکل قطّاع» می‌نامیدند و دو رابطهٔ بالا را با این دو رابطهٔ مرکب نشان می‌دادند:

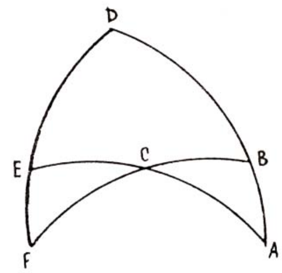
$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}\cdot\frac{FE}{FD} \quad و \quad \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}\cdot\frac{FC}{FB}$$

---

29. Sphaerica



شکل ۱



شکل ۲

برای حالت کروی قضیهٔ منلائوس، چنان‌که در مثلثات یونانی پذیرفته شده بود، وترهای دو برابر کمان را می‌گرفتند.

چهار ضلعی کامل کروی همانند شکل مسطح ولی متشکل از کمانهایی دایره‌های عظیمهٔ واقع بر کره است و رابطه‌های زیر در آن صدق می‌کند:

$$\frac{\text{وتر}\,۲DB}{\text{وتر}\,۲AB} \cdot \frac{\text{وتر}\,۲AC}{\text{وتر}\,۲EC} \cdot \frac{\text{وتر}\,۲FE}{\text{وتر}\,۲FD} = ۱$$

$$\frac{\text{وتر}\,۲DB}{\text{وتر}\,۲AD} \cdot \frac{\text{وتر}\,۲EA}{\text{وتر}\,۲EC} \cdot \frac{\text{وتر}\,۲FC}{\text{وتر}\,۲FB} = ۱$$

استفاده از وتر در این رابطه‌ها به‌جای سینوس به خاطر آن بود که دانشمندان یونان باستان هنوز با تابعهای مثلثاتی آشنا نشده بودند. قضیهٔ منلائوس ابزار اساسی برای حل مثلثهای کروی در مسئله‌های اخترشناسی بود.

بطلمیوس بر پایهٔ نتایج به دست آمده به وسیلهٔ منلائوس و پیشینیان او شرح کامل مثلثات یونان باستان ــ نه تنها مسطح بلکه کروی ــ را نیز در *مجسطی* خود آورد. کار بطلمیوس در شرق سده‌های میانه اعتبار فوق‌العاده یافت. اما به موازات آن دیگر آثار قدیمی (از جمله *اصول* اقلیدس) که اطلاعات لازم برای

محاسبه‌های اخترشناسی را در بر داشت نیز مورد بررسی دقیق قرار گرفت.

با گسترش اندیشه‌های پیشینیان، ریاضی‌دانان خاور میانه و نزدیک و آسیای میانهٔ دوران خجندی که دستگاه روشهای قدیمی محاسبه را همه‌جانبه فرا گرفته بودند، رابطهٔ اصلی مثلثات مسطح و کروی را به دست آوردند. با تبدیل وتر به سینوس و استفاده از خواص نسبتهای مرکب، قاعده‌ای همانند فرمولهای زیر به دست آوردند:

$$\frac{\sin AB}{\sin DB} = \frac{\sin AC}{\sin EC} \cdot \frac{\sin FE}{\sin FD} \quad \text{و} \quad \frac{\sin AD}{\sin DB} = \frac{\sin EA}{\sin EC} \cdot \frac{\sin FC}{\sin FB}$$

مهم‌ترین دوران در گسترش بعدی مثلثات به عنوان رشتهٔ مستقل ریاضی، اثبات قضیهٔ کروی سینوسها بود:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

یعنی در هر مثلث کروی نسبت بین سینوس هر ضلع و سینوس زاویهٔ روبه‌روی آن مقدار ثابتی است.

باید یادآوری کرد که برای ساده‌ترین حالت، یعنی برای مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی، قضیهٔ سینوسها به وسیلهٔ ثابت بن قره (۸۳۶–۹۰۱ م/ ۲۲۱–۲۸۸ هـ) و محمد بتانی (حدود ۸۵۰–۹۲۹ م/ ۲۳۷–۳۱۷ هـ) به کار برده می‌شد. اما برای حالت کلی، این قضیه در دوران خجندی ثابت شد.

در پایان سدهٔ دهم میلادی/ چهارم هجری در بارهٔ حق تقدم در اثبات قضیهٔ سینوسها، بحثی بین ابوالوفا بوزجانی، ابومحمود خجندی و ابن عراق درگرفت که مستقل از یکدیگر دلایل گوناگون عرضه کرده بودند. ابوریحان بیرونی که *مقالید علم الهیئة* خود را به حل این مباحثه اختصاص داده بود، به سود ابن عراق، معلم و دوست خود رای داد.

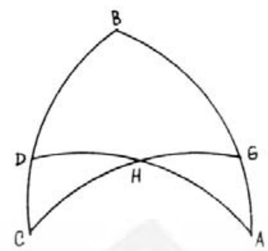
بیرونی با شرح تاریخ پیدایش قضیهٔ سینوسها و جدا کردن حالتهای خاص آن در رسالهٔ خود، در سال ۹۹۵ـ۹۹۶ م/۳۸۵ هـ می‌نویسد: «سرور من

ابومنصور بن علی بن عراق... از من خواست تا کوششهای خود را برای یافتن برهانی مشابه اما [به روش] محاسبه به کار برم... او از من خواست آن را بررسی کنم و مشکلات موجود در حقیقت امر را برطرف و تکلیف مدعیان آن را روشن کنم. من این کار را کردم. ابونصر هم در بارهٔ این مسأله کتابی نوشت و آن را *کتاب سموت* نامید. در این کتاب آنچه از وی خواسته شده بود، یعنی مقدمات قضیهٔ سینوسها را در برخی جاهای این کتاب وارد کرد، بدون توضیح مفصل، جز در جاهایی که این توضیح را لازم می‌دید». سپس گفته می‌شود که ابوالوفا پس از اطلاع یافتن از کتاب ابن عراق از بیرونی خواست که آن را برایش بفرستد و پس از دریافت این کتاب آن را بسیار مفید دانست. ابوالوفا به زودی رساله‌ای خاص نوشت و آن را برای بیرونی فرستاد و پس از یک سال هفت فصل از *مجسطی* فراهم آوردهٔ خود شامل این دلایل را فرستاد. بیرونی می‌نویسد که سپس خجندی را از این کار آگاه کرده و او در بارهٔ این مسأله «کتاب در عملهای [تعیین زمان] در شب از روی ستارگان ثابت» [*کتاب فی اعمال اللیل بالکواکب الثابتة*] را نوشته و در آن اثبات کروی حالت سینوسها را آورده و به آن نام «قاعدهٔ اخترشناسی» [قانون الهیئة] داده است.

از شرح بیرونی نه تنها از تاریخ پیدایش قضیهٔ کلی سینوسها اطلاعاتی پیدا می‌کنیم، بلکه از همکاری خلاق برخی از برجسته‌ترین دانشمندان آسیای میانه و همچنین از آشنایی شخصی و همکاری بیرونی و خجندی آگاه می‌شویم.

در این رساله تبیین و اثبات قضیهٔ ابن عراق آورده شده است: «فرض کنیم کمانهای AB و AD داده شده‌اند که هر یک از آنها یک‌چهارم دایره و کمانهای CB و CHG هر کدام کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از یک‌چهارم دایره یا درست یک‌چهارم [دایره] باشد. اکنون می‌گویم که نسبت سینوس DH به سینوس GB، مانند نسبت سینوس CH به سینوس CG است» (شکل ۳). $AB = AD = 90^\circ$. بنابراین زاویه‌های B و D قائمه‌اند. قضیهٔ ابن عراق منجر به این حکم می‌شود که در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی ABC و $AB'C'$ با زاویهٔ مشترک A و زاویه‌های قائمهٔ B و B' در کمان

ABB' داریم $\frac{\sin a'}{\sin b'} = \frac{\sin a}{\sin b}$ (هر دو نسبت برابرند با $\frac{\sin A}{\sin 90^\circ}$ و قضیهٔ سینوسها از این حکم نتیجه می‌شود (اگر $b' = c' = 90^\circ$، آنگاه زاویهٔ A برابر کمان $B'C'$ است).



شکل ۳

نام اولیهٔ قضیهٔ سینوسها «شکل مُغنی» بود که به معنای «قضیهٔ جانشین» است و منظور این است که این قضیه جایگزین [بی‌نیاز کننده از] قضیهٔ منلائوس می‌شود. چنان‌که می‌بینیم، از میان دانشمندان زیادی که به این قضیه پرداختند، تنها خجندی متوجه اهمیت این قضیه برای حل برخی مسأله‌های اخترشناسی شده و به آن مناسب‌ترین نام یعنی «قاعدهٔ اخترشناسی» [قانون الهیئة] داده است.

نصیرالدین طوسی (۱۲۰۱ـ۱۲۷۴ م/ ۵۹۷ـ۶۷۲ هـ) پایه‌گذار مکتب علمی مراغه در سدهٔ سیزدهم میلادی/ هفتم هجری که بی‌تردید با کارهای خجندی آشنا بود، در رسالهٔ معروف خود «رساله در چهارضلعی کامل» [*کشف القناع عن اسرار شکل القطاع*] که شامل پنج مقاله است، همهٔ دستاوردهای پیشینیان خود در رشتهٔ مثلثات را بسیار مفصل شرح می‌دهد. طوسی بر پایهٔ مدارک تاریخی با اصلاح و بازسازی حق تقدم آنها در رشته‌های جداگانهٔ مثلثات، یافته‌های خویش در این رشته را نیز بیان می‌کند. رساله در آغاز به زبان فارسی نوشته شده بود و سپس خود نویسنده آن را به

زبان عربی برگرداند.[۳۰] برگردان روسی رساله در سال ۱۹۵۲ منتشر شد.

طوسی در فصل پنجم اثر خود در آغاز، شکل‌بندی قضیهٔ سینوسهای خود را شرح می‌دهد. سپس برهانهای این قضیه را از دانشمندان پیشین می‌آورد و یادآوری می‌کند که آنها مستقل از یکدیگر کارهای خود را انجام داده بودند. عین عبارت طوسی در رسالهٔ *کشف القناع* فارسی چنین است: «اصل در دعاوی این شکل آن است که نسبت جیوب اضلاع در مثلثات قوسی با یکدیگر چون نسبت جیوب زوایا است که به آن اضلاع مُوَتّر باشند با یکدیگر.» (برگرفته از رسالهٔ کارشناسی ارشد یونس مهدوی، ص ۱۰۵). سپس طوسی به رسالهٔ *مقالید علم الهیئة* بیرونی استناد می‌کند و می‌نویسد که در تبدیل قضیهٔ منلائوس به قضیهٔ سینوسها، دانشمندان از راههای گوناگون رفته‌اند. «و هر قومی را در اقامت برهان برین مطلوب طریقی دیگر است. و استاد ابوالریحان اکثر آن طرق در رساله‌ای که موسوم است به *مقالید علم الهیئة ما یحدث فی بسیط الکره* جمع کرده است. ولیکن بعضی از آن طریقها به یکدیگر نزدیک است و ما در این فصل آنچه میان آن مباینت بیشتر است یاد کنیم تا رساله مجموع بود و شرط اختصار مرعی. و ابتدا به طریقت امیر ابونصر منصور بن علی بن عراق کنیم، چه غلبهٔ ظن استاد ابوالریحان آن است که سبقت در وضع این شکل او راست، هرچند استادان ابوالوفا محمد بن محمد البوزجانی و ابومحمود حامد بن الخضر الخجندی نیز هر یک دعوی سبقت کرده‌اند» (برگرفته از همان).

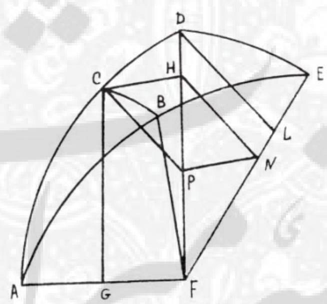
باید یادآوری کرد آن‌گونه که م. دبارنو به تازگی نشان داده، ابن عراق همچنین برای نخستین بار مفهوم مثلث قطبی را در مثلثات کروی معمول کرده است.[۳۱]

---

۳۰. متن فارسی اولیهٔ این اثر را آقای یونس مهدوی به عنوان رسالهٔ کارشناسی ارشد تاریخ علم بر مبنای نسخهٔ خطی یکتای موجود در کتابخانهٔ بادلیان آکسفورد (انگلستان) تصحیح کرده و در آذر ۱۳۸۸ در پژوهشکدهٔ تاریخ علم دانشگاه تهران از آن دفاع کرده است.

31- M. Th. Debarnot, Introduction du triangle polaire par Abu Nasr b. Iraq, *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 2. no. 1, 1978, pp. 126-136.

سپس طوسی با شرح منطقی اثبات قضیهٔ سینوسها از دانشمندان گوناگون، اثبات خجندی را زیر نام «روش دیگر متعلق به ابومحمود خجندی» می‌آورد. طوسی با شناخت بکر بودن آن می‌نویسد: «این روش ساده‌تر و قانع‌کننده‌تر از همهٔ روشهایی است که تا کنون آورده‌ام. مثلث ABC را دوباره در نظر می‌گیریم و کمانهای AB و AC را تا کمانهای AE و AD برابر یک‌چهارم محیط دایره ادامه می‌دهیم (شکل ۴). شعاعهای FA ، FB ، FD و FE را رسم می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که عمود AF بر سطح دایرهٔ DE بر شعاعهای FD و FE عمود است. عمود CH را بر سطح DE و عمودهای CP و HN را بر سطح دایرهٔ ABF فرود می‌آوریم. خط NP را رسم می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که CH و NP متوازیند و با خط HN زاویهٔ قائمه می‌سازند. عمود DL را رسم می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که این خط با HN موازی است و بنابراین مثلثهای DLF و HNF متشابهند.



شکل ۴

بر سطح دایرهٔ AD خط CG را عمود بر فصل مشترک AF وارد می‌کنیم. این خط با HF موازی، و زاویه‌های F و G قائمه و زاویهٔ CFH هم قائمه خواهد بود، زیرا خط CH بر FD عمود است و در نتیجه CHF مثلث قائم‌الزاویه خواهد بود. بنابراین نسبت خطهای FH=CG برابر سینوس AC، به خطهای HN=CP برابر سینوس CB، برابر است با نسبت FD، یعنی سینوس زاویهٔ قائمه، به DL یعنی سینوس زاویهٔ A.

اگر نقطهٔ دیگری را روی کمان AD مورد بررسی قرار دهیم، آنگاه قضیهٔ ما تغییر نمی‌کند، چنان‌که می‌توان گفت که به اثبات هم نیازمندیم».[۳۲]

بیان خجندی را می‌توان چنین نشان داد:

$$\frac{CP}{CG} = \frac{DL}{FD}$$

زیرا FH=CG=sinAC .

HN=CP=sinCB

همچنین

DL=sinA و FD=sin۹۰°

پس

$$\frac{DL}{FD} = \frac{\sin A}{\sin 90^\circ}$$

آنگاه فرمول (۱) به این صورت درمی‌آید[۳۳]:

$$\frac{\sin CB}{\sin AC} = \sin A$$

نصیرالدین طوسی نام اثر خجندی را که در آن اثبات این قضیه آمده است، نمی‌آورد. اما می‌توان گمان کرد که همان «کتاب در بارهٔ ساعتهای گذشته از شب» باشد که بیرونی از آن یاد می‌کند و ما آن را نیافته‌ایم.

اثبات قضیهٔ کروی سینوسها در اثر دیگر خجندی یعنی در *مسائل الهندسیه* که در شمار کارهایش نام برده شده، نیز آمده است. از آن‌جا که تا کنون موفق به یافتن اصل این نسخهٔ خطی نشده‌ایم، از برگردان آلمانی رسالهٔ خجندی که در سال ۱۹۲۶ میلادی به وسیلهٔ ریاضی‌دان ک. شوی منتشر شده است، استفاده می‌کنیم.

ک. شوی با قدردانی از خدمات فوق‌العادهٔ ریاضی‌دانان شرق در پیشرفت مثلثات مسطح و کروی، از دانشمندانی که به این مسائل پرداخته‌اند، نام می‌برد.

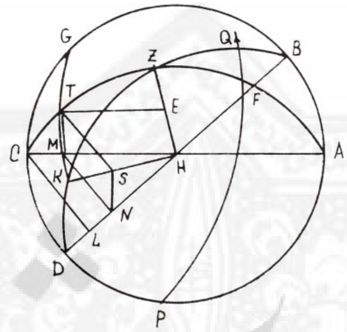
---

۳۲. نصیرالدین طوسی، *کشف القناع* (متن فارسی)، رسالهٔ کارشناسی ارشد یونس مهدوی، ص ۱۱۷–۱۱۸.

۳۳. توجه شود که در اینجا زاویهٔ B قائمه است.

اثبات قضیهٔ سینوسها در مثلث کروی که در این رساله آمده، با کمال و تازگی بیشتر خود از برهان دیگری که نصیرالدین طوسی آورده، متمایز است.

خجندی می‌نویسد: «دو دایرهٔ عظیمه می‌توانند بر سطح کره با هر زاویه‌ای یکدیگر را قطع کنند (شکل ۵). من هم می‌گویم که نسبت سینوس هر کمان به سینوس میل با دو دایرهٔ دیگر برابر است با نسبت سینوس هر کمان دیگر این دایره به سینوس میل با این دایره.



شکل ۵

دایرهٔ ABCD در سطح رسم به مرکز H مفروض است. روی آن به‌طور قائم بر سطح ABCD دو دایرهٔ AZC و BZD رسم شده است. آنها می‌توانند در نقطهٔ Z با هر زاویه‌ای یکدیگر را قطع کنند. من از Z بر دایرهٔ AZC کمان‌های ZT، ZC و ZF را برمی‌گزینم. از نقطهٔ T نیم‌دایرهٔ عظیمه‌ای می‌گذرانم که دایرهٔ BZD را با زاویه قائمه قطع کند». سپس خجندی نخستین دایرهٔ GTK و دومین دایرهٔ PFQ که از نقطهٔ F می‌گذرد و دایرهٔ BZD را نیز با زاویه قائمه قطع می‌کند، رسم می‌کند. خجندی می‌نویسد: «اکنون می‌گویم که

$$\frac{\sin ZT}{\sin TK} = \frac{\sin ZC}{\sin CD} = \frac{\sin ZF}{\sin FQ}$$

اثبات: دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم که یکدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند. AC برای سطحهای ABCD و AZC و BD نیز برای سطحهای ABCD و BZD مشترک است. پاره خط HK را که در عین حال به سطحهای BZD و TK تعلق دارد رسم می‌کنیم. بر خطهای راست AC، BD، ZH و KH به ترتیب عمودهای TM، SN، ET و TS را رسم می‌کنیم. سرانجام، CL و MN را عمود BD رسم می‌کنیم، در این صورت دو سطح دایرهٔ AZC و BZD عمود بر سطح ABCD خواهند شد و همچنین ZH عمود بر ABCD و TH و ST هم عمود بر ABCD خواهند بود. زیرا هر دو عمود بر قطاع مشترک‌اند. TS و CL عمود بر سطح BZD خواهند بود، یعنی دو عمود ZH و TM موازیند و MH در هر دو سطح قرار دارد. زاویه‌های ZMN و TMH و MET در این حالت برابر ۹۰ درجه‌اند. بنابراین زاویهٔ ETM می‌ماند که آن نیز برابر ۹۰ درجه است و در نتیجه سطح HMTS متوازی‌الاضلاع قائم‌الزاویه است. در این صورت TE = MH = sin TZ.

در واقع دو عمود TM و SN موازی‌اند و پاره‌خط راست NM بر هر دو سطح قرار دارد ۹۰° = $\perp SMN = \perp NTM$. اما $TMN\perp$ نیز برابر ۹۰° است و در نتیجه برای زاویه STN نیز ۹۰° باقی می‌ماند. به این ترتیب TMNS متوازی‌الاضلاع قائم‌الزاویه است. حال TS = MN = sin TK و چون NM// TF// هر دو در یک سطح قرار دارند، آنگاه $TS \perp BZD$، نیز $MN \perp BZD$. یادآوری شد که CL ⊥ BZD. در نتیجه MN // CL و $\Delta HMN \sim \Delta HCL$. این تناسب را داریم $\frac{HC}{CN} = \frac{HM}{NL}$ آنگاه MN = sin TK، HM = sin TZ، CL = sin CD و HC = sin CZ. سینوسهای چهار کمان یک تناسب تشکیل می‌دهند. درست همین گونه نیز می‌توان به دست آورد:

$$\frac{\sin ZT}{\sin TK} = \frac{\sin ZF}{\sin FQ}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم».

در تاریخ ریاضیات خدمت خجندی در رشتهٔ آنالیز نامعین، یعنی

پیشگامی‌اش در یکی از نخستین کوششها در جهان برای اثبات قضیهٔ «مجموع دو مکعب نمی‌تواند مکعب باشد»، عظیم است.

بنیادگذار نظریهٔ معادله‌های نامعین، که امروز «آنالیز دیوفانتوسی» نامیده می‌شود، دیوفانتوس اسکندرانی (سدهٔ سوم میلادی) بود. در سدهٔ نهم میلادی / سوم هجری کارهای دیوفانتوس همراه با دیگر آثار یونانیان متأخر به وسیلهٔ ریاضی‌دانان شرق ترجمه و شرح و تفسیر شد. از جمله شرح آثار دیوفانتوس «کتاب مربوط به ترجمهٔ دیوفانتوس دربارهٔ جبر و مقابله» و «شرح سه فصل و یک قطعه از کتاب دیوفانتوس دربارهٔ مسأله‌های عددی» شایستهٔ ذکر است. «حساب» او به روشنی جریان تازه‌ای را در ریاضیات یونانی توصیف می‌کند که آن را به احتمال زیاد باید ادامهٔ سنتهای حساب و جبر بابل کهن دانست. این اثر که در سدهٔ هفدهم میلادی به وسیلهٔ ریاضی‌دان باسیس دومزیریان منتشر شد، مورد توجه پ. فرما (۱۶۰۱ـ۱۶۶۵ م)، ل. اولر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳ م)، ای. ل. لاگرانژ و دیگر دانشمندان مشهور قرار گرفت.

در سال ۱۶۳۷ میلادی پیر فرما قضیهٔ تحسین‌برانگیز خود را تبیین کرد: «معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$ نمی‌تواند به ازای $n > ۲$ برای عددهای درست جواب داشته باشد».[۳۴]

چنان‌که دیده می‌شود در سدهٔ دهم میلادی/ چهارم هجری نخستین حالت خاص این قضیه برای $n = ۳$ به وسیلهٔ ابومحمود خجندی تبیین شد که آن را به صورت این معادله می‌توان نوشت:

$$x^۳ + y^۳ = z^۳$$

اثبات خجندی یا اثری که در آن، این اثبات بیان شده باشد، تا زمان ما حفظ نشده است. اما اطلاع از اثبات خجندی در قابل حل نبودن این معادله برای عددهای گویا x، y و z در رسالهٔ حساب دانشمند ریاضی‌دان پیرو خجندی ابوجعفر محمد بن حسین خازن (که حدود ۳۶۰هـ / ۹۷۰ ق درگذشت) آمده

34. L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol. 2, New York, 1966, p. 545.

است. این رساله در نسخهٔ خطی ــ مجموعه‌ای از رساله‌های ریاضی، در کتابخانهٔ ملی پاریس به شمارهٔ ۲۴۵۷ نگه‌داری می‌شود.

رسالهٔ ابوجعفر به زبان فرانسه ترجمه و در سال ۱۸۶۱ به وسیلهٔ مورخ علم ف. ویکه منتشر شده است.[۳۵] ابوجعفر در بارهٔ اثبات خجندی می‌نویسد: «همان‌گونه که تأکید کرده‌ام، ابومحمود خجندی که رحمت پروردگار بر او باد،[۳۶] ثابت کرده است که مجموع دو مکعب نمی‌تواند مکعب باشد...»

به این ترتیب شرح کوتاه ما از خلاقیت ریاضی خجندی از روی برخی تألیفها و کارهای معاصرانش که به ما رسیده، نشان می‌دهد که حوزهٔ علاقه‌های او بسیار گسترده بود و همهٔ رشته‌های ریاضی را در بر می‌گرفت.

اگر در نظر بگیریم که او خود را همچون مخترع برجستهٔ ابزارهای اخترشناسی نشان داده که اصل کار آنها بر پایهٔ قانونهای ریاضی قرار دارد، آنگاه خجندی را باید بزرگ‌ترین ریاضی‌دان عصر خود دانست.

او استاد اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها برای ساختمان محاسبه‌های هندسی بود. خدمتهای خجندی در پیشرفت مثلثات مسطح و کروی و در رشتهٔ آنالیز نامعین عظیم است.

کارهایش که بر پایهٔ اطلاعات ارزشمند آثار ریاضی یونان و هند قرار داشت، مرحلهٔ مهمی در پیشرفت ریاضی شرق سده‌های میانه بود. آثار ریاضی خجندی تأثیر نمایانی بر خلاقیت بیرونی داشت. از جمله ریاضی‌دانان بعدی باید از نصیرالدین طوسی و دانشمندان مکتب علمی سمرقند در سدهٔ پانزدهم میلادی/ نهم هجری یاد کرد که در خیلی از مسائل از سنتهای خجندی پیروی می‌کردند.

---

35. F. Woepke, Recherches sur plusieurs ouvrage de Leorard de Pise, III, in: *Atti dell'Accademia Pontifica de Nuovi Lincei*, 1861, pp. 301-302.

۳۶. از عبارت «رحمت پروردگار بر او باد» معلوم می‌شود که در آن زمان خجندی درگذشته بود.